

2012 考研数学三真题

1. 选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(2) 设函数 $f(x) = (e^x - 1)(e^{2x} - 2) \cdots (e^{nx} - n)$ ，其中 n 为正整数，则 $f'(0) = ()$

- (A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^n(n-1)!$
 (C) $(-1)^{n-1}n!$ (D) $(-1)^n n!$

(3) 设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2) r dr = ()$

- (A) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2) dy$
 (B) $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$
 (C) $\int_0^2 dx \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} f(x^2 + y^2) dy$
 (D) $\int_0^2 dx \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2 + y^2) dy$

(4) 已知级数 $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n} \sin \frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛， $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则 α 范围为 ()

(A) $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$

(C) $1 < \alpha \leq \frac{3}{2}$ (D) $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

(5) 设 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ c_3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ c_4 \end{pmatrix}$ 其中 c_1, c_2, c_3, c_4

为任意常数, 则下列向量组线性相关的是 ()

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ (B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

(C) $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ (D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$

(6) 设 A 为 3 阶矩阵, P 为 3 阶可逆矩阵, 且 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$,

$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ = ()$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

(7) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 则 $P\{X^2 + Y^2 \leq 1\}$ ()

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\pi}{8}$ (D) $\frac{\pi}{4}$

(8) 设 X_1, X_2, X_3, X_4 为来自总体 $N(1, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$) 的简单随

机样本, 则统计量 $\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$ 的分布 ()

- (A) $N(0, 1)$ (B) $t(1)$ (C) $\chi^2(1)$ (D) $F(1, 1)$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\frac{1}{\cos x - \sin x}}$ _____

(10) 设函数 $f(x) \begin{cases} \ln \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}$, $y = f(f(x))$, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$ _____.

(11) 函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{f(x, y) - 2x + y - 2}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 0$, 则 $dz|_{(0,1)} =$ _____.

(12) 由曲线 $y = \frac{4}{x}$ 和直线 $y = x$ 及 $y = 4x$ 在第一象限中所围图形的面积为 _____.

(13) 设 A 为 3 阶矩阵, $|A|=3$, A^* 为 A 的伴随矩阵, 若交换 A 的第一行与第二行得到矩阵 B , 则 $|BA^*| =$ _____.

(14) 设 A, B, C 是随机事件, A, C 互不相容, $P(AB) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{3}$, 则 $P(\overline{ABC}) =$ _____.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{2-2\cos x}}{x^4}$

(16) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D e^x xy dx dy$, 其中 D 为由曲线 $y = \sqrt{x}$ 与 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 所围区域.

(17) (本题满分 10 分) 某企业为生产甲、乙两种型号的产品, 投入的固定成本为 10000 (万元), 设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x (件) 和 y (件), 且固定两种产品的边际成本分别为 $20 + \frac{x}{2}$ (万元/件) 与 $6 + y$ (万元/件).

- 1) 求生产甲乙两种产品的总成本函数 $C(x, y)$ (万元)
- 2) 当总产量为 50 件时, 甲乙两种的产量各为多少时可以使总成本最小? 求最小的成本.
- 3) 求总产量为 50 件时且总成本最小时甲产品的边际成本, 并解释其经济意义.

(18) (本题满分 10 分)

证明: $x \ln \frac{1+x}{1-x} + \cos x \geq 1 + \frac{x^2}{2}, -1 < x < 1.$

(19) (本题满分 10 分) 已知函数 $f(x)$ 满足方程

$$f''(x) + f'(x) - 2f(x) = 2e^x$$

- 1) 求表达式 $f(x)$
- 2) 求曲线的拐点 $y = f(x^2) \int_0^x f(-t^2) dt$

(20) (本题满分 10 分)

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ a & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I) 求 $|A|$

(II) 已知线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解, 求 a , 并求 $Ax = b$ 的通解.

(21) (本题满分 10 分)

$$\text{已知 } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & a & -1 \end{bmatrix}, \text{ 二次型 } f(x_1, x_2, x_3) = x^T(A^T A)x \text{ 的秩为 } 2,$$

(1) 求实数 a 的值;

(2) 求正交变换 $x = Qy$ 将 f 化为标准型.

(22) (本题满分 10 分)

已知随机变量 X, Y 以及 XY 的分布律如下表所示:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

XY	0	1	2	4
P	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{12}$

求 (1) $P(X=2Y)$;

(2) $\text{cov}(X-Y, Y)$ 与 ρ_{XY} .

(23) (本题满分 10 分)

设随机变量 X 和 Y 相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布,

$V = \min(X, Y), U = \max(X, Y)$.

求 (1) 随机变量 V 的概率密度; (2) $E(U+V)$.

2011 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 已知当 $x \rightarrow 0$ 时，函数 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x$ 与是 cx^k 等价无穷小，则

- (A) $k=1, c=4$ (B) $k=1, c=-4$
 (C) $k=3, c=4$ (D) $k=3, c=-4$

(2) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$ ，则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x) - 2f(x^3)}{x^3} =$

- (A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$ (C) $f'(0)$ (D) 0

(3) 设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是

- (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛
 (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
 (C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛
 (D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

(4) 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cot x) dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos x) dx$ 则 I, J, K 的大小关系是

- (A) $I < J < K$ (B) $I < K < J$ (C) $J < I < K$ (D) $K < J < I$

(5) 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B ，再交换 B 的第 2 行与第 3

行得单位矩阵记为 $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ，则 $A =$

- (A) $P_1 P_2$ (B) $P_1^{-1} P_2$ (C) $P_2 P_1$ (D) $P_2^{-1} P_1$

(6) 设 A 为 4×3 矩阵, η_1, η_2, η_3 是非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的 3 个线性无关的解, k_1, k_2 为任意常数, 则 $Ax = \beta$ 的通解为

- (A) $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_2 - \eta_1)$
- (B) $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_2(\eta_2 - \eta_1)$
- (C) $\frac{\eta_2 + \eta_3}{2} + k_1(\eta_3 - \eta_1) + k_2(\eta_2 - \eta_1)$
- (D) $\frac{\eta_2 - \eta_3}{2} + k_2(\eta_2 - \eta_1) + k_3(\eta_3 - \eta_1)$

(7) 设 $F_1(x), F_2(x)$ 为两个分布函数, 其相应的概率密度 $f_1(x), f_2(x)$ 是连续函数, 则必为概率密度的是

- (A) $f_1(x)f_2(x)$
- (B) $2f_2(x)F_1(x)$
- (C) $f_1(x)F_2(x)$
- (D) $f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x)$

(8) 设总体 X 服从参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布, $X_1, X_1, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体的简单随即样本, 则对应的统计量 $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$

- (A) $ET_1 > ET_2, DT_1 > DT_2$
- (B) $ET_1 > ET_2, DT_1 < DT_2$
- (C) $ET_1 < ET_2, DT_1 > DT_2$
- (D) $ET_1 < ET_2, DT_1 < DT_2$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设 $f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$, 则 $f'(x) =$ _____.

(10) 设函数 $z = (1 + \frac{x}{y})^y$, 则 $dz|_{(1,1)} =$ _____.

(11) 曲线 $\tan(x + y + \frac{\pi}{4}) = e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 _____.

(12) 曲线 $y = \sqrt{x^2 - 1}$, 直线 $x = 2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积 _____.

(13) 设二次型 $f(X_1, X_2, X_3) = x^T Ax$ 的秩为 1, A 中行元素之和为 3, 则 f 在正交变换下 $x = Qy$ 的标准型为 _____.

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从 $N(\mu, \mu; \sigma^2, \sigma^2; 0)$, 则 $E(XY^2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2\sin x} - x - 1}{x \ln(1+x)}$.

(16) (本题满分 10 分)

已知函数 $f(u, v)$ 具有连续的二阶偏导数, $f(1, 1) = 2$ 是 $f(u, v)$ 的极值,

$z = f(x, y)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{(1,1)}$.

(17) (本题满分 10 分)

求 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} + \ln x}{\sqrt{x}} dx$

(18) (本题满分 10 分)

证明 $4 \arctan x - x + \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} = 0$ 恰有 2 实根.

(19) (本题满分 10 分)

$f(x)$ 在 $[0, 1]$ 有连续的导数, $f(0) = 1$, 且 $\iint_{D_t} f'(x+y) dx dy = \iint_{D_t} f(x) dx dy$,

$D_t = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq t, 0 \leq x+y \leq t\} (0 < t \leq 1)$, 求 $f(x)$ 的表达式.

(20) (本题满分 11 分)

设 3 维向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 3, 5)^T$ 不能由 $\beta_1 = (1, a, 1)^T$,

$\beta_2 = (1, 2, 3)^T$, $\beta_3 = (1, 3, 5)^T$ 线性标出.

求: (I) 求 a ;

(II) 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.

(21) (本题满分 11 分)

已知 A 为三阶实矩阵, $R(A) = 2$, 且 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

求：(I) 求 A 的特征值与特征向量；

(II) 求 A

(22) (本题满分 11 分)

已知 X, Y 的概率分布如下：

X	0	1
P	1/3	2/3

Y	-1	0	1
P	1/3	1/3	1/3

且 $P(X^2 = Y^2) = 1$,

求：(I) (X, Y) 的分布；

(II) $Z = XY$ 的分布；

(III) ρ_{XY} .

(23) (本题满分 11 分)

设 (X, Y) 在 G 上服从均匀分布， G 由 $x - y = 0$ ， $x + y = 2$ 与 $y = 0$ 围成。

求：(I) 边缘密度 $f_X(x)$ ；

(II) $f_{X|Y}(x|y)$ 。

2010 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请把所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - a \right) e^x \right] = 1$ ，则 a 等于

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(2) 设 y_1, y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)x$ 的两个特解，若常数 λ, μ 使 $\lambda y_1 + \mu y_2$ 是该方程的解， $\lambda y_1 - \mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则 ()

- (A) $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = \frac{1}{2}$ (B) $\lambda = -\frac{1}{2}, \mu = -\frac{1}{2}$
 (C) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{1}{3}$ (D) $\lambda = \frac{2}{3}, \mu = \frac{2}{3}$

(3) 设函数 $f(x), g(x)$ 具有二阶导数，且 $g''(x) < 0$ 。若 $g(x_0) = a$ 是 $g(x)$ 的极值，则 $f[g(x)]$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是 ()

- (A) $f'(a) < 0$ (B) $f'(a) > 0$
 (C) $f''(a) < 0$ (D) $f''(a) > 0$

(4) 设 $f(x) = \ln^{10} x, g(x) = x, h(x) = e^{\frac{x}{10}}$ ，则当 x 充分大时有 ()

- (A) $g(x) < h(x) < f(x)$ (B) $h(x) < g(x) < f(x)$
 (C) $f(x) < g(x) < h(x)$ (D) $g(x) < f(x) < h(x)$

(5) 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示，下列命题正确的是

- (A) 若向量组 I 线性无关，则 $r \leq s$ (B) 若向量组 I 线性相关，则 $r > s$
 (C) 若向量组 II 线性无关，则 $r \leq s$ (D) 若向量组 II 线性相关，则 $r > s$

(6) 设 A 为 4 阶实对称矩阵，且 $A^2 + A = 0$ ，若 A 的秩为 3，则 A 相似于

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$
- (B) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$
- (C) $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$
- (D) $\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

(7) 设随机变量的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $P\{X=1\} =$

- (A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2} - e^{-1}$ (D) $1 - e^{-1}$

(8) 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$ 为 $[-1, 3]$ 上的均匀分布的概率密度,

若 $f(x) = \begin{cases} af_1(x) & x \leq 0 \\ bf_2(x) & x > 0 \end{cases}$ ($a > 0, b > 0$) 为概率密度, 则 a, b 应满足

- (A) $2a + 3b = 4$ (B) $3a + 2b = 4$
 (C) $a + b = 1$ (D) $a + b = 2$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设可导函数 $y = y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} e^{-t^2} dt = \int_0^x x \sin t^2 dt$ 确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} =$ _____.

(10) 设位于曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$ ($e \leq x < +\infty$) 下方, x 轴上方的无界区域为 G , 则 G

绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积是_____.

(11) 设某商品的收益函数为 $R(p)$, 收益弹性为 $1 + p^3$, 其中 p 为价格, 且 $R(1) = 1$, 则 $R(p) =$ _____.

(12) 若曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点 $(-1, 0)$, 则 $b =$ _____.

(13) 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$, 则 $|A + B^{-1}| =$ _____.

(14) 设 x_1, x_2, x_n 为来自整体 $N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$ 的简单随机样本, 记统计量

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \text{ 则 } ET = \underline{\hspace{2cm}}.$$

三、解答题: 15-23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^x - 1)^{\frac{1}{\ln x}}$

(16) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D (x+y)^3 dx dy$, 其中 D 由曲线 $x = \sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x + \sqrt{2}y = 0$ 及 $x - \sqrt{2}y = 0$ 围成。

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值和最小值

(18) (本题满分 10 分)

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$ ($n = 1, 2, \dots$) 的大小, 说明理由

(II) 设 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ ($n = 1, 2, \dots$), 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上连续, 在 $(0, 3)$ 内存在二阶导数, 且

$$2f(0) = \int_0^2 f(x) dx = f(2) + f(3),$$

(I) 证明: 存在 $\eta \in (0, 2)$, 使 $f(\eta) = f(0)$

(II) 证明: 存在 $\xi \in (0, 3)$, 使 $f''(\xi) = 0$

(20) (本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

已知线性方程组 $Ax = b$ 存在 2 个不同的解

(I) 求 λ, a

(II) 求方程组 $Ax = b$ 的通解

(21) (本题满分 11 分)

设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & a \\ 4 & a & 0 \end{bmatrix}$, 正交矩阵 Q 使得 $Q^T A Q$ 为对角矩阵, 若 Q 的第 1 列为

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, \bar{1}), \text{ 求 } a, Q$$

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}$, $-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$, 求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$

(23) (本题满分 11 分)

箱内有 6 个球, 其中红, 白, 黑球的个数分别为 1, 2, 3, 现在从箱中随机的取出 2 个球, 设 X 为取出的红球个数, Y 为取出的白球个数,

(I) 求随机变量 (X, Y) 的概率分布

(II) 求 $Cov(X, Y)$

2009 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请把所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin \pi x}$ 的可去间断点的个数为

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多个.

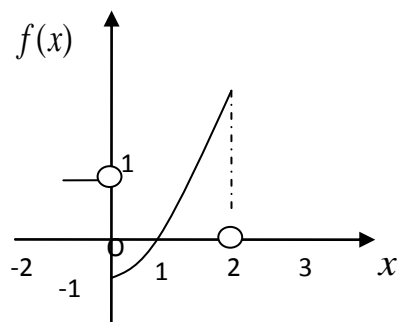
(2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 是等价无穷小, 则

- (A) $a=1, b=-\frac{1}{6}$. (B) $a=1, b=\frac{1}{6}$.
 (C) $a=-1, b=-\frac{1}{6}$. (D) $a=-1, b=\frac{1}{6}$.

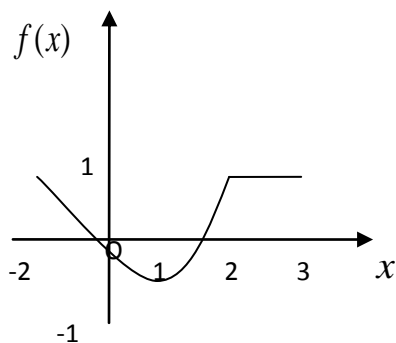
(3) 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x$ 成立的 x 的范围是

- (A) $(0,1)$. (B) $(1, \frac{\pi}{2})$. (C) $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. (D) $(\pi, +\infty)$.

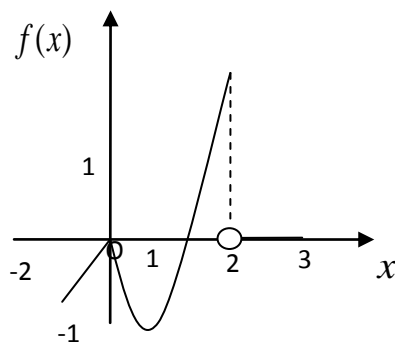
(4) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形为



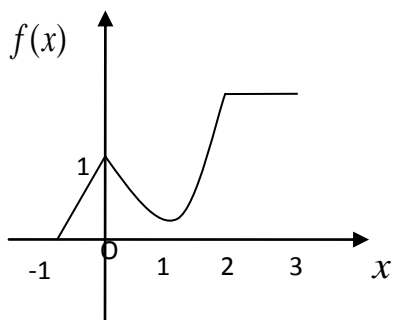
则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为



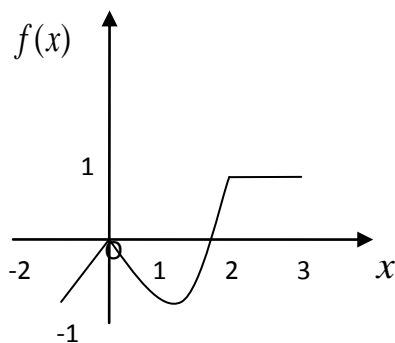
(A)



(B)



(C)



(D)

(5) 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 若 $|A|=2, |B|=3$, 则分

块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$.

(6) 设 A, P 均为 3 阶矩阵, P^T 为 P 的转置矩阵, 且 $P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), Q = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^T A Q$ 为

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(7) 设事件 A 与事件 B 互不相容, 则

(A) $P(\overline{AB}) = 0$.

(B) $P(AB) = P(A)P(B)$.

(C) $P(\overline{A}) = 1 - P(B)$.

(D) $P(\overline{A \cup B}) = 1$.

(8) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, Y 的概率分布为

$P\{Y=0\} = P\{Y=1\} = \frac{1}{2}$, 记 $F_z(Z)$ 为随机变量 $Z = XY$ 的分布函数, 则函数 $F_z(z)$ 的间断点个数为

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 设 $z = (x + e^y)^x$, 则 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - (-1)^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设某产品的需求函数为 $Q = Q(P)$, 其对应价格 P 的弹性 $\xi_p = 0.2$, 则当需求量为 10000 件时, 价格增加 1 元会使产品收益增加 $\underline{\hspace{2cm}}$ 元.

(13) 设 $\alpha = (1, 1, 1)^T$, $\beta = (1, 0, k)^T$, 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设 X_1, X_2, \dots, X_m 为来自二项分布总体 $B(n, p)$ 的简单随机样本, \bar{X} 和 S^2 分别为样本均值和样本方差, 记统计量 $T = \bar{X} - S^2$, 则 $ET = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值.

(16) (本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \ln\left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}\right) dx \quad (x > 0)$.

(17) (本题满分 10 分)

计算二重积分 $\iint_D (x-y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$.

(18) (本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理, 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上可导, 则 $\xi \in (a, b)$, 得证 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $(0, \sigma)$, $\sigma > 0$ 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

(19) (本题满分 10 分)

设曲线 $y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(x) > 0$. 已知曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 0, x = 1$ 及 $x = t (t > 1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍, 求该曲线的方程.

(20) (本题满分 11 分)

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \xi_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(I) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1$, $A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 .

(II) 对 (I) 中的任意向量 ξ_2, ξ_3 , 证明 ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

(21) (本题满分 11 分)

设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值.

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

(22) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x} & 0 < y < x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(I) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$;

(II) 求条件概率 $P\{X \leq 1|Y \leq 1\}$.

(23) (本题满分 11 分)

袋中有一个红球，两个黑球，三个白球，现在放回的从袋中取两次，每次取一个，求以 X 、 Y 、 Z 分别表示两次取球所取得的红、黑与白球的个数.

(I) 求 $P\{X = 1|Z = 0\}$;

(II) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

2008 年全国硕士研究生入学统一考试

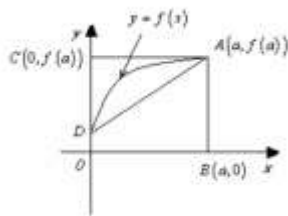
数学三试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

(1) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x) = \frac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 的 ()

- (A) 跳跃间断点.
- (B) 可去间断点.
- (C) 无穷间断点.
- (D) 振荡间断点.

(2) 如图，曲线段方程为 $y = f(x)$ ，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有连续的导数，则定积分



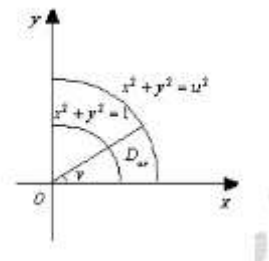
$\int_0^a xf'(x)dx$ 等于 ()

- (A) 曲边梯形 $ABOD$ 面积.
- (B) 梯形 $ABOD$ 面积.
- (C) 曲边三角形 ACD 面积.
- (D) 三角形 ACD 面积.

(3) 已知 $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^4}}$ ，则

- (A) $f'_x(0,0)$ ， $f'_y(0,0)$ 都存在
- (B) $f'_x(0,0)$ 不存在， $f'_y(0,0)$ 存在
- (C) $f'_x(0,0)$ 存在， $f'_y(0,0)$ 不存在
- (D) $f'_x(0,0)$ ， $f'_y(0,0)$ 都不存在

(4) 设函数 f 连续，若 $F(u, v) = \iint_{D_{uv}} \frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$ ，其中 D_{uv} 为图中阴影部分，则 $\frac{\partial F}{\partial u} =$



()

- (A) $vf(u^2)$ (B) $\frac{v}{u}f(u^2)$ (C) $vf(u)$ (D) $\frac{v}{u}f(u)$

(5) 设 A 为阶非 0 矩阵, E 为 n 阶单位矩阵, 若 $A^3 = 0$, 则 ()

- (A) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆.
 (B) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆.
 (C) $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆.
 (D) $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆.

(6) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 则在实数域上域与 A 合同的矩阵为 ()

- (A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
 (C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(7) 随机变量 X, Y 独立同分布, 且 X 分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \max\{X, Y\}$ 分布函数为 ()

- (A) $F^2(x)$. (B) $F(x)F(y)$.
 (C) $1 - [1 - F(x)]^2$. (D) $[1 - F(x)][1 - F(y)]$.

(8) 随机变量 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(1, 4)$ 且相关系数 $\rho_{XY} = 1$, 则 ()

- (A) $P\{Y = -2X - 1\} = 1$. (B) $P\{Y = 2X - 1\} = 1$.
 (C) $P\{Y = -2X + 1\} = 1$. (D) $P\{Y = 2X + 1\} = 1$.

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & |x| \leq c \\ \frac{2}{|x|}, & |x| > c \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $c = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 设 $f(x + \frac{1}{x}) = \frac{x + x^3}{1 + x^4}$, 则 $\int_2^{2\sqrt{2}} f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则 $\iint_D (x^2 - y) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1, 2, 2, E 为 3 阶单位矩阵, 则 $|4A^{-1} - E| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布, 则 $P\{X = EX^2\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题: 15-23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}$.

(16) (本题满分 10 分)

设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 + y^2 - z = \varphi(x + y + z)$ 所确定的函数, 其中 φ 具有 2 阶导数且 $\varphi' \neq -1$ 时.

(I) 求 dz

(II) 记 $u(x, y) = \frac{1}{x-y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$.

(17) (本题满分 11 分)

计算 $\iint_D \max(xy, 1) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

(18) (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数,

(I) 证明对任意的实数 t , 有 $\int_t^{t+2} f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx$;

(II) 证明 $G(x) = \int_0^x \left[2f(t) - \int_t^{t+2} f(s) ds \right] dt$ 是周期为 2 的周期函数.

(19) (本题满分 10 分)

设银行存款的年利率为 $r = 0.05$ ，并依年复利计算，某基金会希望通过存款 A 万元，实现第一年提取 19 万元，第二年提取 28 万元， \dots ，第 n 年提取 $(10+9n)$ 万元，并能按此规律一直提取下去，问 A 至少应为多少万元？

(20) (本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $Ax = b$ ，其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- (I) 求证行列式 $|A| = (n+1)a^n$;
- (II) a 为何值时，该方程组有唯一解，并求 x_1 ;
- (III) a 为何值时，方程组有无穷多解，并求通解。

(21) (本题满分 10 分)

设 A 为 3 阶矩阵， a_1, a_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量，向量 a_3 满足 $Aa_3 = a_2 + a_3$,

- (I) 证明 a_1, a_2, a_3 线性无关;
- (II) 令 $P = (a_1, a_2, a_3)$ ，求 $P^{-1}AP$.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立， X 的概率分布为 $P\{X = i\} = \frac{1}{3} (i = -1, 0, 1)$ ， Y 的概率密度为 $f_Y(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$ ，记 $Z = X + Y$

- (I) 求 $P\left\{Z \leq \frac{1}{2} \mid X = 0\right\}$;
- (II) 求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23) (本题满分 11 分)

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是总体为 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本. 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$,

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad T = \bar{X}^2 - \frac{1}{n} S^2.$$

(I) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量.

(II) 当 $\mu=0, \sigma=1$ 时, 求 DT .

2007 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请把所选项前的字母填在答题纸指定位置上

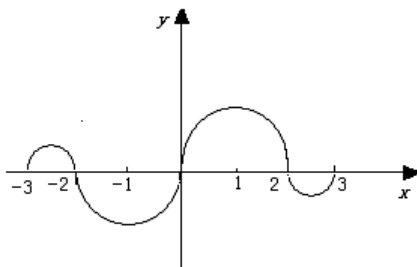
(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时，与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是 ()

- (A) $1 - e^{\sqrt{x}}$ (B) $\ln(1 + \sqrt{x})$ (C) $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$ (D) $1 - \cos \sqrt{x}$

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是 ()

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0) = 0$
 (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0) = 0$
 (C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在
 (D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

(3) 如图，连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 上图形分别是直径为 2 的上、下半圆周，设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ，则下列结论正确的是 ()



- (A) $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$ (B) $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$
 (C) $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$ (D) $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$

(4) 设函数 $f(x, y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_{\sin x}^1 f(x, y) dy$ 等于 ()

- (A) $\int_0^1 dy \int_{\pi + \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$ (B) $\int_0^1 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{\pi} f(x, y) dx$
 (C) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi + \arcsin y} f(x, y) dx$ (D) $\int_0^1 dy \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx$

(5) 设某商品的需求函数为 $Q=160-2\rho$, 其中 Q, ρ 分别表示需要量和价格, 如果该商品需求弹性的绝对值等于 1, 则商品的价格是 ()

- (A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40

(6) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1+e^x)$, 渐近线的条数为 ()

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(7) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 则下列向量组线性相关的是 ()

- (A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$
 (C) $\alpha_1 - 2\alpha_2, \alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_3 - 2\alpha_1$ (D) $\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + 2\alpha_1$

(8) 设矩阵 $A = \begin{Bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{Bmatrix}$, $B = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$, 则 A 与 B ()

- (A) 合同, 且相似 (B) 合同, 但不相似
 (C) 不合同, 但相似 (D) 既不合同, 也不相似

(9) 某人向同一目标独立重复射击, 每次射击命中目标的概率为 p , 则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为 ()

- (A) $3p(1-p)^2$ (B) $6p(1-p)^2$
 (C) $3p^2(1-p)^2$ (D) $6p^2(1-p)^2$

(10) 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 且 X 与 Y 不相关, $f_x(x), f_y(y)$ 分别表示 X, Y 的概率密度, 则在 $Y = y$ 条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为 ()

- (A) $f_x(x)$ (B) $f_y(y)$
 (C) $f_x(x)f_y(y)$ (D) $\frac{f_x(x)}{f_y(y)}$

二、填空题: 11-16 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上

(11) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{2^x + x^3} (\sin x + \cos x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设函数 $y = \frac{1}{2x+3}$, 则 $y^{(n)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设 $f(u, v)$ 是二元可微函数, $z = f\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{y}\right)$, 则 $x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$ _____.

(14) 微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y|_{x=1} = 1$ 的特解为 $y =$ _____.

(15) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^3 的秩为 _____.

(16) 在区间 $(0, 1)$ 中随机地取两个数, 这两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 _____.

三、解答题: 17—24 小题, 共 86 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17) (本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y \ln y - x + y = 0$ 确定, 试判断曲线 $y = y(x)$ 在点 $(1, 1)$ 附近的凹凸性.

(18) (本题满分 11 分)

设二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2, & |x| + |y| \leq 1. \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & 1 \leq |x| + |y| \leq 2. \end{cases}$$

计算二重积分 $\iint_D f(x, y) d\sigma$. 其中 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 2\}$.

(19) (本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上内二阶可导且存在相等的最大值, 又 $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, 证明:

(I) 存在 $\eta \in (a, b)$, 使得 $f(\eta) = g(\eta)$;

(II) 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = g''(\xi)$.

(20) (本题满分 10 分)

将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数, 并指出其收敛区间.

(21) (本题满分 11 分)

$$\text{设线性方程组 } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1 \quad (2)$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解。

(22) (本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2, \alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量。记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵。

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(II) 求矩阵 B 。

(23) (本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1. \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(I) 求 $P\{X > 2Y\}$;

(II) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 。

(24) (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta, \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中参数 $\theta (0 < \theta < 1)$ 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本, \bar{X} 是样本均值。

(I) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(II) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量, 并说明理由。

2006 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、填空题：1—6 小题，每小题 4 分，共 24 分。把答案填在题中横线上。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x) = e^{f(x)}$ ， $f(2) = 1$ ，则 $f'''(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设函数 $f(u)$ 可微，且 $f'(0) = \frac{1}{2}$ ，则 $z = f(4x^2 - y^2)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $dz|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ， E 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$ ，则 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则 $P\{\max\{X, Y\} \leq 1\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ ($-\infty < x < +\infty$)， X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 X 的简单随机样本，其样本方差为 S^2 ，则 $ES^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、选择题：7—14 小题，每小题 4 分，共 32 分。每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

(7) 设函数 $y = f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ ， Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量， Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x > 0$ ，则 ()

- (A) $0 < dy < \Delta y$. (B) $0 < \Delta y < dy$.
 (C) $\Delta y < dy < 0$. (D) $dy < \Delta y < 0$.

(8) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2)}{h^2} = 1$ ，则 ()

- (A) $f(0) = 0$ 且 $f'_-(0)$ 存在 (B) $f(0) = 1$ 且 $f'_-(0)$ 存在
 (C) $f(0) = 0$ 且 $f'_+(0)$ 存在 (D) $f(0) = 1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

(9) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则级数 ()

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛.

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 收敛.

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 收敛.

(10) 设非齐次线性微分方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x), y_2(x)$, C 为任意常数, 则该方程的通解是 ()

(A) $C[y_1(x) - y_2(x)]$.

(B) $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$.

(C) $C[y_1(x) + y_2(x)]$.

(D) $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$

(11) 设 $f(x, y)$ 与 $\varphi(x, y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x, y) \neq 0$, 已知 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 ()

(A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

(B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

(D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

(12) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 为 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ()

(A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.

(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

(13) 设 A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B , 再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到

第 2 列得 C , 记 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 ()

(A) $C = P^{-1}AP$.

(B) $C = PAP^{-1}$.

(C) $C = P^T A P$.

(D) $C = P A P^T$.

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, 随机变量 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$,

且

$$P\{|X - \mu_1| < 1\} > P\{|Y - \mu_2| < 1\}$$

则必有 ()

(A) $\sigma_1 < \sigma_2$

(B) $\sigma_1 > \sigma_2$

(C) $\mu_1 < \mu_2$

(D) $\mu_1 > \mu_2$

三、解答题: 15—23 小题, 共 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 7 分)

设 $f(x, y) = \frac{y}{1+xy} - \frac{1-y\sin\frac{\pi x}{y}}{\arctan x}, x > 0, y > 0$, 求:

(I) $g(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y)$;

(II) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

(16) (本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint_D \sqrt{y^2 - xy} dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x, y = 1, x = 0$ 所围成的平面区域。

域。

(17) (本题满分 10 分)

证明: 当 $0 < a < b < \pi$ 时,

$$b \sin b + 2 \cos b + \pi b > a \sin a + 2 \cos a + \pi a$$

(18) (本题满分 8 分)

在 xOy 坐标平面上, 连续曲线 L 过点 $M(1, 0)$, 其上任意点 $P(x, y) (x \neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a > 0$)。

(I) 求 L 的方程;

(II) 当 L 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时, 确定 a 的值。

(19) (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $s(x)$ 。

(20) (本题满分 13 分)

设 4 维向量组 $\alpha_1 = (1+a, 1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (2, 2+a, 2, 2)^T, \alpha_3 = (3, 3, 3+a, 3)^T, \alpha_4 = (4, 4, 4, 4+a)^T$ 问 a 为何值时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关? 当 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关时, 求其一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表出。

(21) (本题满分 13 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = (-1, 2, -1)^T, \alpha_2 = (0, -1, 1)^T$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的两个解。

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$;

(III) 求 A 及 $\left(A - \frac{3}{2}E\right)^6$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵。

(22) (本题满分 13 分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

令 $Y = X^2, F(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数。

(I) 求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(II) $\text{Cov}(X, Y)$;

(III) $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ 。

(23) (本题满分 13 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1, \\ 1-\theta, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 θ 是未知参数 ($0 < \theta < 1$), X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 N 为样本值 x_1, x_2, \dots, x_n 中小于 1 的个数。

(I) 求 θ 的矩估计;

(II) 求 θ 的最大似然估计。

2005 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、填空题: 本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2+1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 2$ 的特解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设二元函数 $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$, 则 $dz|_{(1,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设行向量组 $(2, 1, 1), (1, 2, a), (a, 3, 2), (1, a, 4)$ 线性相关, 且 $a \neq 1$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 从数 $1, 2, 3, 4$ 中任取一个数, 记为 X , 再从 $1, \dots, X$ 中任取一个数, 记为 Y , 则 $P\{Y=2\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立, 则 $a = \underline{\hspace{1cm}}$, $b = \underline{\hspace{1cm}}$.

二、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 请把所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(7) 当 a 取下列哪个值时, 函数 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - a$ 恰有两个不同的零点.

- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

(8) 设 $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2+y^2} d\sigma, I_2 = \iint_D \cos(x^2+y^2) d\sigma, I_3 = \iint_D \cos(x^2+y^2)^2 d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2+y^2 \leq 1\}$, 则

- (A) $I_3 > I_2 > I_1$ (B) $I_1 > I_2 > I_3$ (C) $I_2 > I_1 > I_3$ (D) $I_3 > I_1 > I_2$

(9) 设 $a_n > 0, n=1, 2, \dots$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 则下列结论正确的是

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 发散 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 发散
 (C) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$ 收敛 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$ 收敛

(10) 设 $f(x) = x \sin x + \cos x$ ，下列命题中正确的是

- (A) $f(0)$ 是极大值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极小值
 (B) $f(0)$ 是极小值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极大值
 (C) $f(0)$ 是极大值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极大值
 (D) $f(0)$ 是极小值, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极小值

(11) 以下四个命题中, 正确的是

- (A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界
 (B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界
 (C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界
 (D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界, 则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界

(12) 设矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足 $A^* = A^T$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, A^T 为 A 的转置矩阵.

若 a_{11}, a_{12}, a_{13} 为三个相等的正数, 则 a_{11} 为

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) 3 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\sqrt{3}$

(13) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则

$\alpha_1, A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是

- (A) $\lambda_1 = 0$ (B) $\lambda_2 = 0$ (C) $\lambda_1 \neq 0$ (D) $\lambda_2 \neq 0$

(14) (注: 该题已经不在数三考纲范围内)

三、解答题: 本题共 9 小题, 满分 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right)$.

(16) (本题满分 8 分)

设 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 且 $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) + yf\left(\frac{x}{y}\right)$, 求 $x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

(17) (本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

(18) (本题满分 9 分)

求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - 1 \right) x^{2n}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数 $S(x)$.

(19) (本题满分 8 分)

设 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的导数连续, 且 $f(0) = 0, f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0$. 证明: 对任何 $\alpha \in [0, 1]$, 有

$$\int_0^{\alpha} g(x) f'(x) dx + \int_0^1 f(x) g'(x) dx \geq f(\alpha) g(1)$$

(20) (本题满分 13 分)

已知齐次线性方程组

$$(i) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 0, \end{cases} \quad \text{和} \quad (ii) \begin{cases} x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ 2x_1 + b^2x_2 + (c+1)x_3 = 0, \end{cases}$$

同解, 求 a, b, c 的值.

(21) (本题满分 13 分)

设 $D = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 其中 A, B 分别为 m 阶, n 阶对称矩阵, C 为 $m \times n$ 阶

矩阵.

(I) 计算 $P^T D P$, 其中 $P = \begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix}$;

(II) 利用 (I) 的结果判断矩阵 $B - C^T A^{-1} C$ 是否为正定矩阵, 并证明你的结论.

(22) (本题满分 13 分)

设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x, \\ 1, & \text{其它.} \end{cases}$$

求: (I) (X, Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$;

(II) $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$;

(III) $P\left\{Y \leq \frac{1}{2} \mid X \leq \frac{1}{2}\right\}$.

(23) (本题满分 13 分)

设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为来自总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 其样本均值为 \bar{X} ,

记 $Y_i = X_i - \bar{X}, i = 1, 2, \dots, n$.

(I) 求 Y_i 的方差 $DY_i, i = 1, 2, \dots, n$;

(II) 求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $Cov(Y_1, Y_n)$;

(III) 若 $c(Y_1 + Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量, 求常数 c .

2004 年全国硕士研究生入学统一考试

数学三试题

一、填空题: 本题共 6 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 函数 $f(u, v)$ 由关系式 $f[xg(y), y] = x + g(y)$ 确定, 其中函数 $g(y)$ 可微, 且

$g(y) \neq 0$, 则 $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2}, & -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}, \\ -1, & x \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$ 则 $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的秩为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 则 $P\{X > \sqrt{DX}\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(6) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma^2)$, 总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2, \sigma^2)$,

X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 和 Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, 则

$$E \left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \bar{Y})^2}{n_1 + n_2 - 2} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 4 分, 满分 24 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 请把所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(7) 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界.

- (A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$

(8) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则

- (A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点 (B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点
(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点 (D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的值

有关.

(9) 设 $f(x) = |x(1-x)|$, 则

- (A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

- (C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
 (D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(10) 设有以下命题:

- ① 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛
 ② 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$ 收敛
 ③ 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散
 ④ 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n, \sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛

则以上命题中正确的是

- (A) ①② (B) ②③ (C) ③④ (D) ①④

(11) 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f'(a) > 0, f'(b) < 0$, 则下列结论中错误的是

- (A) 至少存在一点 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f(x_0) > f(a)$
 (B) 至少存在一点 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f(x_0) > f(b)$
 (C) 至少存在一点 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f'(x_0) = 0$
 (D) 至少存在一点 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f(x_0) = 0$

(12) 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 则必有

- (A) 当 $|A|=a(a \neq 0)$ 时, $|B|=a$ (B) 当 $|A|=a(a \neq 0)$ 时, $|B|=-a$
 (C) 当 $|A| \neq 0$ 时, $|B|=0$ (D) 当 $|A|=0$ 时, $|B|=0$

(13) 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* \neq 0$, 若 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的

互不相等的解, 则对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系

- (A) 不存在 (B) 仅含一个非零解向量
 (C) 含有两个线性无关的解向量 (D) 含有三个线性无关的解向量

(14) 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, 对给定的 $\alpha \in (0, 1)$, 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$, 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于

- (A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$ (B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ (C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$ (D) $u_{1-\alpha}$

三、解答题：本题共 9 小题，满分 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

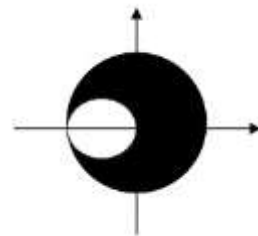
(15) (本题满分 8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$.

(16) (本题满分 8 分)

求 $\iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y) d\sigma$, 其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 所围成的平面

区域 (如图)。



(17) (本题满分 8 分)

设 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且满足

$$\int_a^x f(t) dt \geq \int_a^x g(t) dt, \quad x \in [a, b],$$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b g(t) dt$$

证明: $\int_a^b xf(x) dx \leq \int_a^b xg(x) dx$.

(18) (本题满分 9 分)

设某商品的需求函数为 $Q = 100 - 5P$, 其中价格 $P \in (0, 20)$, Q 为需求量.

(I) 求需求量对价格的弹性 E_d ($E_d > 0$);

(II) 推导 $\frac{dR}{dP} = Q(1 - E_d)$ (其中 R 为收益), 并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时, 降低价格反而使收益增加.

(19) (本题满分 9 分)

设级数 $\frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots (-\infty < x < +\infty)$ 的和函数为 $S(x)$. 求:

(I) $S(x)$ 所满足的一阶微分方程;

(II) $S(x)$ 的表达式.

(20) (本题满分 13 分)

设 $\alpha_1 = (1, 2, 0)^T, \alpha_2 = (1, a+2, -3a)^T, \alpha_3 = (-1, -b-2, a+2b)^T, \beta = (1, 3, -3)^T$. 试

讨论当 a, b 为何值时,

(I) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示;

(II) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表示, 并求出表示式;

(III) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 但表示式不唯一, 并求出表示式.

(21) (本题满分 13 分)

设 n 阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & b & \cdots & b \\ b & 1 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & 1 \end{bmatrix}$.

(I) 求 A 的特征值和特征向量;

(II) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

(22) (本题满分 13 分)

设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$, 令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生,} \\ 0, & A \text{ 不发生.} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生,} \\ 0, & B \text{ 不发生.} \end{cases}$$

求: (I) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布;

(II) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} ;

(III) $Z = X^2 + Y^2$ 的概率分布.

(23) (本题满分 13 分)

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^\beta, & x > \alpha, \\ 0, & x \leq \alpha. \end{cases}$$

其中参数 $\alpha > 0, \beta > 1$. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 当 $\alpha = 1$ 时, 求未知参数 β 的矩估计量;

(II) 当 $\alpha = 1$ 时, 求未知参数 β 的最大似然估计量;

(III) 当 $\beta = 2$ 时, 求未知参数 α 的最大似然估计量.