数学重点、难点归纳辅导

第一部分

第一章　　　集合与映射

§1.集合

§2.映射与函数

本章教学要求：理解集合的概念与映射的概念，掌握实数集合的表示法，函数的表示法与函数的一些基本性质。

第二章　　　数列极限

§1.实数系的连续性

§2.数列极限

§3.无穷大量

§4.收敛准则

本章教学要求：掌握数列极限的概念与定义，掌握并会应用数列的收敛准则，理解实数系具有连续性的分析意义，并掌握实数系的一系列基本定理。

第三章　　函数极限与连续函数

§1.函数极限

§2.连续函数

§3.无穷小量与无穷大量的阶

§4.闭区间上的连续函数

本章教学要求：掌握函数极限的概念，函数极限与数列极限的关系，无穷小量与无穷大量阶的估计，闭区间上连续函数的基本性质。

第四章　　微　分

§1.微分和导数

§2.导数的意义和性质

§3.导数四则运算和反函数求导法则

§4.复合函数求导法则及其应用

§5.高阶导数和高阶微分

本章教学要求：理解微分，导数，高阶微分与高阶导数的概念，性质及相互关系，熟练掌握求导与求微分的方法。

第五章　　微分中值定理及其应用

§1.微分中值定理

§2.L′Hospital 法则

§3.插值多项式和 Taylor 公式

§4.函数的 Taylor 公式及其应用

§5.应用举例

§6.函数方程的近似求解

本章教学要求：掌握微分中值定理与函数的 Taylor 公式，并应用于函数性质的研究，熟练运用 L′ Hospital 法则计算极限，熟练应用微分于求解函数的极值问题与函数作图问题。

第六章　　不定积分

§1.不定积分的概念和运算法则

§2.换元积分法和分部积分法

§3.有理函数的不定积分及其应用

本章教学要求:掌握不定积分的概念与运算法则,熟练应用换元法和分部积分法求解不定积分,掌握求有理函数与部分无理函数不定积分的方法。

第七章　　定积分（§1 —§3）

§1.定积分的概念和可积条件

§2.定积分的基本性质

§3.微积分基本定理

第七章　　定积分（§4 —§6）

§4.定积分在几何中的应用

§5.微积分实际应用举例

§6.定积分的数值计算

本章教学要求：理解定积分的概念，牢固掌握微积分基本定理：牛顿—莱布尼兹公式，熟练定积分的计算，熟练运用微元法解决几何，物理与实际应用中的问题，初步掌握定积分的数值计算。

第八章　　反常积分

§1.反常积分的概念和计算

§2.反常积分的收敛判别法

本章教学要求：掌握反常积分的概念，熟练掌握反常积分的收敛判别法与反常积分的计算。

第九章　　数项级数

§1.数项级数的收敛性

§2.上级限与下极限

§3.正项级数

§4.任意项级数

§5.无穷乘积

本章教学要求：掌握数项级数敛散性的概念，理解数列上级限与下极限的概念，熟练运用各种判别法判别正项级数，任意项级数与无穷乘积的敛散性。

第十章　　函数项级数

§1.函数项级数的一致收敛性

§2.一致收敛级数的判别与性质

§3.幂级数

§4.函数的幂级数展开

§5.用多项式逼近连续函数

本章教学要求：掌握函数项级数（函数序列）一致收敛性概念，一致收敛性的判别法与一致收敛级数的性质，掌握幂级数的性质，会熟练展开函数为幂级数，了解函数的幂级数展开的重要应用。

第十一章　Euclid 空间上的极限和连续

§1.Euclid 空间上的基本定理

§2.多元连续函数

§3.连续函数的性质

本章教学要求：了解 Euclid 空间的拓扑性质，掌握多元函数的极限与连续性的概念，区分它们与一元函数对应概念之间的区别，掌握紧集上连续函数的性质。

第十二章　多元函数的微分学（§1—§5）

§1.偏导数与全微分

§2. 多元复合函数的求导法则

§3.Taylor 公式

§4.隐函数

§5.偏导数在几何中的应用

第十二章　多元函数的微分学（§6—§7）

§6.无条件极值

§7.条件极值问题与 Lagrange 乘数法

本章教学要求：掌握多元函数的偏导数与微分的概念，区分它们与一元函数对应概念之间的区别，熟练掌握多元函数与隐函数的求导方法，掌握偏导数在几何上的应用，掌握求多元函数无条件极值与条件极值的方法。

第十三章　　重积分

§1.有界闭区域上的重积分

§2.重积分的性质与计算

§3.重积分的变量代换

§4.反常重积分

§5.微分形式

本章教学要求：理解重积分的概念，掌握重积分与反常重积分的计算方法，会熟练应用变量代换法计算重积分，了解微分形式的引入在重积分变量代换的表示公式上的应用。

第十四章　　曲线积分与曲面积分

§1.第一类曲线积分与第一类曲面积分

§2.第二类曲线积分与第二类曲面积分

§3.Green 公式，Gauss 公式和 Stokes 公式

§4.微分形式的外微分

§5.场论初步

本章教学要求：掌握二类曲线积分与二类曲面积分的概念与计算方法，掌握 Green 公式，Gauss 公式和 Stokes 公式的意义与应用，理解外微分的引入在给出 Green 公式，Gauss 公式和 Stokes 公式统一形式上的意义，对场论知识有一个初步的了解。

第十五章　含参变量积分

§1.含参变量的常义积分

§2.含参变量的反常积分

§3.Euler 积分

本章教学要求：掌握含参变量常义积分的性质与计算，掌握含参变量反常积分一致收敛的概念，一致收敛的判别法，一致收敛反常积分的性质及其在积分计算中的应用，掌握 Euler 积分的计算。

第十六章　Fourier 级数

§1.函数的 Fourier 级数展开

§2. Fourier 级数的收敛判别法

§3. Fourier 级数的性质

§4. Fourier 变换和 Fourier 积分

§5.快速 Fourier 变换

本章教学要求：掌握周期函数的 Fourier 级数展开方法，掌握 Fourier 级数的收敛判别法与 Fourier 级数的性质，对 Fourier 变换与 Fourier 积分有一个初步的了解。

试题

一、解答下列各题

1、 求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\tan x-\tan 2}{\sin\ln(x-1)}$.

2、 求$\int (e^x+1)^3 e^x\,\mathrm{d}x$.

3、 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x^2+10x+1}{x^3+0.1x^2+0.01x+0.001}$.

4、 设$y=x^2\int_0^{3x}\sin^2 t\,dt$, 求$y'$.

5、 设$f(x)=\begin{cases}x^2-x+1, & x\le 1;\\ 2x-x^2, & x>1\end{cases}$ 求$f(1+a)+f(1-a)$，其中$a>0$.

6、 求极限 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{\ln|x|}$.

7、 设　$y=(3x+1)\ln(3x+1)$，求y''

8、 求$\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

9、 设　$y(x)=x^3e^{-2x}$，求$dy\big|_{x=1}$.

求由方程$x^{2/3}+y^{\frac{2}{3}}=a^{2/3}$(常数$a>0$)确定的隐函数

10、$y=y(x)$的微分dy.

设$y=y(x)$由$x=(1+s^2)^{1/2}$和$y=(1-s^2)^{1/2}$所确定,

11、试求$\dfrac{dy}{dx}$.

12、设$y=y(x)$由方程$y=e^{\frac{x+y}{x}}$所确定,求y'

13、若$x>0$,证明$x^2+\ln(1+x)^2>2x$

14、求$\int_1^{16}\dfrac{dx}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$.

15、求$\int_1^{2}\dfrac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

16、求$\int\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$.

二、解答下列各题

1、要做一个圆锥形漏斗,其母线长$20cm$,要使其体积最大,问其高应为多少?

2、求曲线$y=2-x^2$与$y=|x|$所围成的平面图形的面积.

3、求曲线$y=x^2$和$y=x^3$在$[0,1]$上所围成的平面图形的面积.

三、解答下列各题

证明方程$x^5-7x=4$在区间$(1,2)$内至少有一个实根.

四、解答下列各题

判定曲线$y=(x+3)\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上的凹凸性

第二部分

（1） **课程名称**：微分几何

（2） **基本内容**：三维空间中经典的曲线和曲面的理论。主要内容有：

曲线论，内容包括：曲线的切向量与弧长；主法向量与从法向量；曲率与扰率；Frenet 标架与 Frenet 公式；曲线的局部结构；曲线论的基本定理；平面曲线的一些整体性质，

如切线的旋转指标定理，凸曲线的几何性质，等周不等式，四顶点定理与Cauchy-Crofton 公式；空间曲线的一些整体性质，如球面的 Crofton 公式，Fenchel 定理与 Fary-Milnor 定理。

曲面的局部理论，内容包括：曲面的表示、切向量、法向量；旋转曲面、直纹面与可展曲面；曲面的第一基本形式与内蕴量；曲面的第二基本形式；曲面上的活动标架与基本公式；Weingarten 变换与曲面的渐近线、共扼线；法曲率；主方向、主曲率与曲率线；Gauss 曲率和平均曲率；曲面的局部结构；Gauss 映照与第三基本形式；全脐曲面、极小曲面与常 Gauss 曲率曲面；曲面论的基本定理；测地曲率与测地线；向量的平行移动。

基本要求：通过本课程的学习，学生应掌握曲线论与曲面论中的一些基本几何概念与研究微分几何的一些常用方法。以便为以后进一步学习、研究现代几何学打好基础；另一方面培养学生理论联系实际和分析问题解决问题的能力。

二、讲授纲要

第一章　三维欧氏空间的曲线论

§1　曲线　曲线的切向量　弧长

教学要求：理解曲线的基本概念、会求曲线的切向量与弧长、会用弧长参数表示曲线。

§2　主法向量与从法向量　曲率与扰率

教学要求：理解曲率与挠率、主法向量与从法向量、密切平面与从切平面等基本概念，会计算曲率与挠率。

§3　Frenet 标架　Frenet 公式

教学要求：掌握 Frenet 公式，能运用 Frenet 公式去解决实际问题。

§4　曲线在一点邻近的性质

教学要求：能表达曲线在一点领域内的局部规范形式，理解扰率符号的集合意义。

§5　曲线论基本定理

教学要求：掌握曲线论的基本定理，能求已知曲率与扰率的一些简单的曲线。

§6　平面曲线的一些整体性质

6．1　关于闭曲线的一些概念

6．2　切线的旋转指标定理

6．3　凸曲线*

6．4　等周不等式*

6．5　四顶点定理*

6．6　Cauchy-Crofton 公式*

教学要求：理解平面曲线的一些基本概念：闭曲线、简单曲线、切线像、相对全曲

率、旋转指标、凸曲线。掌握平面曲线的一些整体性质：简单闭曲线切线的旋转指标定理，凸曲线的几何性质，等周不等式，四顶点定理与 Cauchy-Crofton 公式。

§7　空间曲线的整体性质

7．1　　球面的 Crofton 公式*

7．2　　Fenchel 定理*

7．3　　Fary-Milnor 定理*

教学要求：理解全曲率的概念。掌握空间曲线的一些整体性质：球面的 Crofton 公式，Fenchel 定理与 Fary-Milnor 定理。

第二章　三维欧氏空间中曲面的局部几何

§1　曲面的表示 切向量 法向量

1．1　　曲面的定义

1．2　　切向量 切平面

1．3　　法向量

1．4　　曲面的参数表示

1．5　　例

1．6　　单参数曲面族 平面族的包络面 可展曲面

教学要求：掌握曲面的三种局部解析表示；会求曲面的切平面与法线；了解旋转曲面与直纹面的表示；掌握可展曲面的特征。

§2　曲面的第一、第二基本形式

2．1　　曲面的第一基本形式

2．2　　曲面的正交参数曲线网

2．3　　等距对应 曲面的内蕴几何

2．4　　共形对应

2．5　　曲面的第二基本形式

教学要求：掌握曲面的第一基本形式及相关量——曲面上曲线的弧长、两相交曲线的交角与面积的计算，并理解其几何意义；了解等距对应与共形对应；掌握第二基本形式。

§3　曲面上的活动标架 曲面的基本公式

3．1　　省略和式记号的约定

3．2　　曲面上的活动标架 曲面的基本公式

3．3　　Weingarten 变换 W

3．4　　曲面的共轭方向 渐近方向 渐近线

教学要求：掌握曲面上的活动标架与曲面的基本公式，能求正交参数曲线网的联络系

数；理解 Weingarten 变换与共轭方向、渐近方向，会求一些简单曲线的渐近曲线。

§4　曲面上的曲率

4．1　曲面上曲线的法曲率

4．2　主方向　主曲率

4．3　Dupin 标线

4．4　曲率线

4．5　主曲率及曲率线的计算　总曲率　平均曲率

4．6　曲率线网

4．7　曲面在一点的邻近处的形状

4．8　Gauss 映照及第三基本形式

4．9　总曲率、平均曲率满足某些性质的曲面

教学要求：理解法曲率、主方向与主曲率、曲率线、总曲率和平均曲率概念与几何意义，并会对它们进行计算；掌握 Gauss 映照及第三基本形式；能对全脐曲面与总曲率为零的曲面进行分类；掌握极小曲面的几何意义并会求一些简单的极小曲面。

§5　曲面的基本方程及曲面论的基本定理

5．1　曲面的基本方程

5．2　曲面论的基本定理

教学要求：掌握、理解曲面的基本方程与曲面论基本定理。

§6　测地曲率　测地线

6．1　测地曲率向量　测地曲率

6．2　计算测地曲率的 Liouville 公式

6．3　测地线

6．4　法坐标系　测地极坐标系　测地坐标系

6．5　应用

6．6　测地挠率

6．7　Gauss-Bonnet 公式

教学要求：理解与掌握测地曲率和测地线、测地挠率、法坐标系、测地极坐标系与测地坐标系的定义及其几何意义；能用 Liouville 公式计算测地曲率与测地线；能用测地极坐标系对总曲率为常数的曲面进行研究；理解（局部）Gauss-Bonnet 公式。

§7　曲面上的向量的平行移动

7．1　向量沿曲面上一条曲线的平行移动　绝对微分

7．2　　绝对微分的性质

7．3　　自平行曲线

7．4　　向量绕闭曲线一周的平行移动　总曲率的又一种表示

7．5　　沿曲面上曲线的平行移动与欧氏平面中平行移动的关系

教学要求：理解向量沿曲面上一条曲线的平行移动与绝对微分。

习题：

1. 证明推论 2.3.1，

2. 设 X, Y 为 Banach 空间，$x(t):[a,b]\to X$ 是连续抽象函数，对有界线性算子 $T: X\to Y$，

   证明：Tx 在 $[a,b]$ 上 R－可积，并且 $\int_a^b Tx(t)dt = T\int_a^b x(t)dt$。

3. 设 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 中的算子 T 由 $(Tx)(t)=\int_a^t(1+s^2)[x(s)]^2 ds$ 给出，T 在任一元素 x 处是否 F－可导？若答案肯定，求导算子 $T'(x)$。

4. 设 f 是 R^n 到 R 中的一个 C^1 映射。证明：f 在 $x_0\in R^n$ 处沿方向 $h\in R^n$ 的 G－微分

   $df(x_0;h)$ 等于 $grad f(x_0)\, h^T$,

   这里 $grad f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\frac{\partial f}{\partial x_3},\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$，$h=(h_1,h_2,\cdots h_n)$；

在 $f(x_1;\cdots,x_3)=x_1x_2+x_ex_3+\cdots+x_{n-1}x_n$ 和 $h=(1,2,3,0,0,\cdots,0,1)$,

$x_0=(n,n-1,\cdots,3,2,1)$ 的情况下计算 $df(x_0;h)$，又问：f 在 $x\in R^n$ 处的 F－导数是什么？

当 $f(x)=x_1+x_2^2+x_3^3+\cdots+x_n^n$ 时求 $f'(x)$。

5. 设 $T: R^2\to R^3$ 由 $T(x,y)=(x^2-y^2, xy^2+3y, 4x+5y)$ 定义，求 T 在（－1，2）处沿方向（1，－1）的 G－微分。

   解：写 $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2-y^2\\xy^2+3y\\4x+5y\end{pmatrix}$，知 $T'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & -2y\\y^2 & 2xy+3\\4 & 5\end{pmatrix}$，故所求 G－微分为

$$T'\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -4\\4 & -1\\4 & 5\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}。$$

6. 设 X、Y 是赋范线性空间，T： $X \to Y$ 由 $Tx = Ax + y_0, \forall x \in X$ 定义，其 $y_0 \in Y$， $A \in \mathrm{B}(X, Y)$，证明 T 在 $\forall x \in X$ 处 F—可微，且求其 F—导算子。

解：

$$\forall x \in X, \forall h \in X, T(x+h) - T(x) = A(x+h) + y_o - (Ax + y_o) = Ax + Ah + y_o$$

$- Ax - y_o = Ah + \theta$，由于 $A \in \mathrm{B}(X, Y)$，且 $\|\theta\| \|h\|^{-1} = 0 \to 0, (\|h\| \to 0), T$ 在 x 处是 F—可微的，且 $T'(x) = A$。

7. 设 $T: R^3 \to R^2$ 由 $T((x, y, z)) = (3x^2 - 2y, y^2 + 2xz) \in R^2, \forall (x, y, z) \in R^3$ 确定，求 T 在（1，2，－1）处的 F—导数。

解：采用列向量表示，T 将 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 变换成 $\begin{pmatrix} 3x^2 - 2y \\ y^2 + 2xz \end{pmatrix}$，故 T 在 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 处的 F—导数应是变换 T 的 Jacobi 矩阵 $\begin{pmatrix} 6x & -2 & 0 \\ 2z & 2y & 2x \end{pmatrix}$，在 $(x, y, z) = (1,\ 2,\ -1)$ 处，此矩阵为 $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$，在列向量表示下，$T$ 在（1，2，－1）处的 F—导数作为线性算子就是此常数矩阵决定的变换：

$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \in R^3$，右端即 $\begin{pmatrix} 6h_1 - 2h_2 \\ -2h_1 + 4h_2 + 2h_3 \end{pmatrix} \in R^2$ 故 T 在（1，2，－1）处的 F—导数就是将 $\forall (h_1, h_2, h_3)$ 变换为 $(6h_1 - 2h_2, -2h_1 + 4h_2 + 2h_3)$ 的线性变换。

［备注 1：这一答案保持了原题用行向量叙述的方式。］

［备注 2：当 $T: R^3 \to R^2$ 表示为 $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 2y \\ y^2 + 2xz \end{pmatrix} \in R^2, \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$，我们可得 T 在 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 处的 F—导数是：

$$T'\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6x & -2 & 0 \\ 2z & 2y & 2x \end{pmatrix}，\text{即 } T'\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -2 & 0 \\ 2z & 2y & 2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \in R^3,$$

故 $$T'\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6h_1 - 2h_2 \\ -2h_1 + 4h_2 + 2h_3 \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \in R^3$$

或 $T'\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$，算子对向量的作用以相应的矩阵对向量的左乘表示。］

第三部分

数基本定理1. 高等代

设 K 为数域。以 $K[x]$ 表示系数在 K 上的以 x 为变元的一元多项式的全体。如果 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+......+a_n\in K[x],(a_0\neq 0)$，则称 n 为 $f(x)$ 的次数，记为 $\deg f(x)$。

定理（高等代数基本定理） $\mathbf{C}[x]$ 的任一元素在 $\mathbf{C}$ 中必有零点。

命题 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+......+a_n,(a_0\neq 0,\ n\geq 1)$ 是 $\mathbf{C}$ 上一个 n 次多项式，a 是一个复数。则存在 $\mathbf{C}$ 上首项系数为 a_0 的 $n-1$ 次多项式 $q(x)$，使得

$$f(x)=q(x)(x-a)+f(a)$$

证明 对 n 作数学归纳法。

推论 x_0 为 $f(x)$ 的零点，当且仅当 $(x-x_0)$ 为 $f(x)$ 的因式（其中 $\deg f(x)\geq 1$）。

命题（高等代数基本定理的等价命题） 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+......+a_n$ $(a_0\neq 0,\ n\geq 1)$ 为 $\mathbf{C}$ 上的 n 次多项式，则它可以分解成为一次因式的乘积，即存在 n 个复数 $a_1,a_2,......,a_n$，使

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)......(x-\alpha_n)$$

证明 利用高等代数基本定理和命题 1.3，对 n 作数学归纳法。

2. 高等代数基本定理的另一种表述方式

定义 设 K 是一个数域，x 是一个未知量，则等式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+......+a_{n-1}x+a_n=0 \qquad (1)$$

（其中 $a_0,a_1,......,a_n\in K,\ a_0\neq 0$）称为数域 K 上的一个 n 次**代数方程**；如果以 $x=\alpha\in K$ 带入（1）式后使它变成等式，则称 α 为方程（1）在 K 中的一个**根**。

定理（高等代数基本定理的另一种表述形式） 数域 K 上的 $n(\geq 1)$ 次代数方程在复数域 $\mathbf{C}$ 内必有一个根。

命题 n 次代数方程在复数域 $\mathbf{C}$ 内有且恰有 n 个根（可以重复）。

命题（高等代数基本定理的另一种表述形式）给定 $\mathbf{C}$ 上两个 n 次、m 次多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+......+a_nx^n \quad (a_n\neq 0),$$

$$g(x)=b_0+b_1x+......+b_mx^m \quad (b_m\neq 0),$$

如果存在整整数 $l, l \ge m, l \ge n$,及 $l+1$ 个不同的复数 $\beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_l, \beta_{l+1}$，使得

$$f(\beta_i) = g(\beta_i) \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, l+1),$$

则 $f(x) = g(x)$。

1.2.2 韦达定理与实系数代数方程的根的特性

设 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$，其中 $a_i \in K, a_0 \ne 0$。设 $f(x) = 0$ 的复根为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$（可能有重复），则

$$\frac{1}{a_0} f(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$$
$$= x^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n.$$

所以

$$\frac{a_1}{a_0} = (-1)^1 (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n);$$

$$\frac{a_2}{a_0} = (-1)^2 \sum_{0 \le i_1 \le i_2 \le n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a_n}{a_0} = (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n.$$

我们记

$$\sigma_0(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = 1;$$

$$\sigma_1(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \prod_{0 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_r \le n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_r};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sigma_n(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$$

（$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 称为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的**初等对称多项式**）。于是有

定理 2.5（韦达定理） 设 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$，其中 $a_i \in K, a_0 \ne 0$。设 $f(x) = 0$ 的复根为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$。则

$$\frac{a_1}{a_0}=(-1)^1\sigma_1(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n);$$

$$\frac{a_2}{a_0}=(-1)^2\sigma_2(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{a_n}{a_0}=(-1)^n\sigma_n(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).$$

命题 给定 **R** 上 n 次方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,\qquad a_0\neq 0,$$

如果 $\alpha=a+b\mathrm{i}$ 是方程的一个根，则共轭复数 $\overline{\alpha}=a-b\mathrm{i}$ 也是方程的根。

证明 由已知，

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\ldots\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n=0.$$

两边取复共轭，又由于 $a_0,a_1,\ldots\ldots,a_n\in\mathbf{R}$，所以

$$a_0\overline{\alpha}^n+a_1\overline{\alpha}^{n-1}+\ldots\ldots+a_{n-1}\overline{\alpha}+a_n=0.$$

高等代数试题

设 $\sigma\in L(V),\xi\in V$，并且 α，$\sigma(\alpha)$，…，$\sigma^{k-1}(\alpha)$ 都不等于零，但 $\sigma^k(\alpha)=0$，证明：α，$\sigma(\alpha)$，…，$\sigma^{k-1}(\alpha)$ 线性无关

答案：按线性无关的定义证明

2、令 $F_n[x]$ 表示一切次数不大于 n 的多项式连同零多项式所成的向量空间，$\sigma: f(x)\mapsto f'(x)$，求 σ 关于以下两个基的矩阵：

（1）1，x，x^2，…，x^n，

（2）1，$x-c$，$\dfrac{(x-c)^2}{2!}$，…，$\dfrac{(x-c)^n}{n!}$，$c\in F$

答：（1）$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ （2）$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

3、F^4 表示数域 F 上四元列空间　取

$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{bmatrix}$ 对于 $\xi \in F^4$，令　$\sigma(\xi)=A\xi$

求 $\dim(\ker(\sigma))$，$\dim(\mathrm{Im}(\sigma))$

解：$R(A)=2$，取 F^4 的一个基（如标准基），按列排成矩阵 B，矩阵 AB 的列向量恰是这个基的象。又 $|B|\neq 0$，所以　R(AB)=R（A）=2　所以　$\dim(\mathrm{Im}(\sigma))=2$

$$\dim(\ker(\sigma))=\text{解空间的秩}=4-R(A)=2$$

4、设 F 上三维向量空间的线性变换 σ 关于基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 的矩阵是

$\begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}$，求 σ 关于基 $\begin{aligned} \beta_1 &= 2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3 \\ \beta_2 &= 3\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3 \\ \beta_3 &= \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3 \end{aligned}$ 的矩阵

$$B=T^{-1}AT=\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \qquad T=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5、令 σ 是数域 F 上向量空间 V 的一个线性变换，并且满足条件　　　，证明：（1）

$\ker(\sigma)=\{\xi-\sigma(\xi)|\xi\in V\}$　（2）$V=\ker(\sigma)\oplus\mathrm{Im}(\sigma)$

证明：（1）$\forall\alpha\in\{\xi-\sigma(\xi)|\xi\in V\}$，则

$$\sigma(\alpha)=\sigma(\xi-\sigma(\xi))=\sigma(\xi)-\sigma^2(\xi)=\sigma(\xi)-\sigma(\xi)=0,\ \alpha\in Ker(\sigma)$$

反之，$\beta\in Ker(\sigma)$，$\sigma(\beta)=0$，$\beta=\beta-\sigma(\beta)\in\{\xi-\sigma(\xi)|\xi\in V\}$

于是　$\ker(\sigma)=\{\xi-\sigma(\xi)|\xi\in V\}$

$\forall\alpha\in V,\alpha=\xi-\sigma(\xi)+\sigma(\xi)$，即 $V=\ker(\sigma)+\mathrm{Im}(\sigma)$

设 $\beta\in\ker(\sigma)\cap\mathrm{Im}(\sigma)$ 由 $\beta\in\mathrm{Im}(\sigma)$，有 $v\in V$，使得

$\sigma(v)=\beta,\sigma^2(v)=\sigma(\beta)$,因$\sigma^2=\sigma$，所以$\sigma(v)=\sigma(\beta)$ 又 $\beta\in\ker(\sigma)$，所以

$\sigma(\beta)=0$，于是$\sigma(v)=0$，即 $\beta=0$ 所以 $\ker(\sigma)\cap\mathrm{Im}(\sigma)=0$

6、设 $A=\begin{bmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{bmatrix}$，求 A^{10}

解：特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=-2$

特征向量 $\xi_1=(0,0,1)^T$ $\xi_2=(-2,1,0)^T$，$\xi_3=(-1,1,1)^T$

$P=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 则 $P^{-1}AP=\Lambda$，$A^{10}=P\Lambda^{10}P^{-1}$