2005年全国硕士研究生入学统一考试理工
数学二试题详解及评析

一、　填空题（本题共6小题，每小题4分，满分24分. 把答案填在题中横线上）

（1）　设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $dy\Big|_{x=\pi}=$ ______

【答】　$-\pi dx$.

【详解】　$dy=de^{x\ln(1+\sin x)}=(1+\sin x)^x d\left(x\ln(1+\sin x)\right)$

$$=\ln(1+\sin x)\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)+\ln(1+\sin x)dx$$

$$dy\Big|_{x=\pi}=y'(\pi)dx=-\pi dx.$$

（2）　曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为______.

【答】　$y=x+\dfrac{3}{2}$

【详解】　因为 a= $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x\sqrt{x}}=1$,

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}=\frac{3}{2},$$

于是所求斜渐近线方程为 $y=x+\dfrac{3}{2}$.

（3）$\displaystyle\int_0^1\frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=$ ______

【答】　$\dfrac{\pi}{4}$.

【详解】　令 $x=\sin t$，则

$$\int_0^1\frac{xdx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t\cos t}{(2-\sin^2 t)\cos t}dt$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cos t}{1+\cos^2 t}=-\arctan(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

（4）微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为______.

【答】　$y=\dfrac{1}{3}x\ln x-\dfrac{1}{9}x.$

【详解】 原方程等价为

$$y' + \frac{2}{x}y = \ln x,$$

于是通解为 $y = e^{-\int \frac{2}{x}dx}[\int \ln x \cdot e^{\int \frac{2}{x}dx} dx + C] = \frac{1}{x^2} \cdot [\int x^2 \ln x dx + C]$

$$= \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{9}x + C\frac{1}{x^2},$$

由 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 得 C=0，故所求解为 $y = \frac{1}{3}x\ln x - \frac{1}{9}x$.

（5）当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1 + x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 k= ______

【答】 $\frac{3}{4}$.

【详解】 $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x \to 0}\frac{\sqrt{1 + x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}}{kx^2}$

$$= \lim_{x \to 0}\frac{x\arcsin x + 1 - \cos x}{kx^2(\sqrt{1 + x\arcsin x} + \sqrt{\cos x})}$$

$$= \frac{1}{2k}\lim_{x \to 0}\frac{x\arcsin x + 1 - \cos x}{x^2} = \frac{3}{4k} = 1,$$

得 $k = \frac{3}{4}$.

（6）设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵

$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$， $B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$，

如果 $|A| = 1$，那么 $|B| =$____.

【答】 2

【详解】 由题设，有

$$B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix},$$

于是有 $|B| = |A| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times 2 = 2.$

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 4 分，满分 32 分. 每小题给出的四个选项中，

只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内）

（7）设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$ ，则 f(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A) 处处可导. (B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点. (D) 至少有三个不可导点.

【 】

【答】 应选（C）

【详解】 先求出 f(x)的表达式.

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+|x|^{3n}\right)^{\frac{1}{n}}=1^0=1\left(|x|<1\right),$$

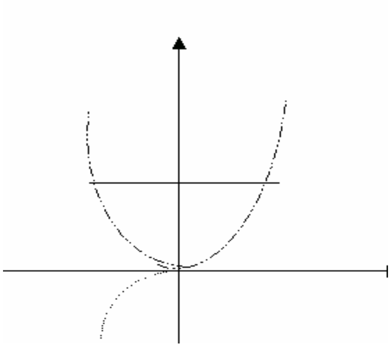
$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=\lim_{n\to\infty}(1+1)^{\frac{1}{n}}=2^0=1\left(|x|=1\right),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=|x|^3\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{|x|^{3n}}\right)^{\frac{1}{n}}=|x|^3\left(|x|>1\right).$$

因此，

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ |x|^3, & |x|>1.\end{cases}$$

由 $y=f(x)$ 的表达式及它的函数图形可知，$f(x)$ 在 $x=\pm1$ 处不可导（图形是尖点），其余点 $f(x)$ 均可导，因此选（C）.



（8）设 F(x)是连续函数 f(x)的一个原函数，"$M\Leftrightarrow N$"表示“M 的充分必要条件是 N”，则必有

(A) F(x)是偶函数 $\Leftrightarrow$ f(x)是奇函数.

（B） F(x)是奇函数 $\Leftrightarrow$ f(x)是偶函数.

(C) F(x)是周期函数 $\Leftrightarrow$ f(x)是周期函数.

(D) F(x)是单调函数 $\Leftrightarrow$ f(x)是单调函数.

【 】

【答】 应选（A）

【详解】 已知，$F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$

若 $F(x)$ 为奇函数 $\Rightarrow \int_0^x f(t)dt$ 为偶函数 $\Rightarrow F(x)$ 的全体原函数为偶函数.

又若 $F(x)$ 为偶函数，则 $F'(x)=f(x)$ 为奇函数，因此选（A）.

（9） 设函数 y=y(x)由参数方程 $\begin{cases} x=t^2+2t, \\ y=\ln(1+t) \end{cases}$ 确定，则曲线 y=y(x)在 x=3 处的法线与 x 轴交点的横坐标是

(A) $\frac{1}{8}\ln 2+3$. (B) $-\frac{1}{8}\ln 2+3$.

(C) $-8\ln 2+3$. (D) $8\ln 2+3$.

【 】

【答】 应选（B）

【详解】 当 x=3 时，有 $t^2+2t=3$，得 $t=1, t=-3$（舍去，此时 y 无意义），于是

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\left.\frac{\frac{1}{1+t}}{2t+2}\right|_{t=1}=\frac{1}{8},$$

可见过点 x=3(此时 y=ln2)的法线方程为：

$$y-\ln 2=-8(x-3),$$

令 y=0, 得其与 x 轴交点的横坐标为：$\frac{1}{8}\ln 2+3$,

故应(A).

（10） 设区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\}$，f(x)为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，则 $\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=$

(A) $ab\pi$. (B) $\frac{ab}{2}\pi$. (C) $(a+b)\pi$. (D) $\frac{a+b}{2}\pi$.

【 】

【答】 应选（D）

【详解】 由轮换对称性，有

$$\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}d\sigma$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}+\frac{a\sqrt{f(y)}+b\sqrt{f(x)}}{\sqrt{f(y)}+\sqrt{f(x)}}\right]d\sigma$$

$$=\frac{a+b}{2}\iint_D d\sigma=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2=\frac{a+b}{2}\pi.$$

应选(D).

(11) 设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$，其中函数 φ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　（B） $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　(D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

【 】

【答】 应选（B）

【详解】 $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x+y)+\varphi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y)$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(x+y)-\varphi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y)，$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)，$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\varphi''(x+y)-\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y)，$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\varphi''(x+y)+\varphi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y)，$$

可见有 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，应选(B).

(12) 设函数 $f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则

(A) x=0,x=1 都是 f(x)的第一类间断点.

（B） x=0,x=1 都是 f(x)的第二类间断点.

(C) x=0 是 f(x)的第一类间断点，x=1 是 f(x)的第二类间断点.

(D) x=0 是 f(x)的第二类间断点，x=1 是 f(x)的第一类间断点.

【 】

【答】 应选（D）

【详解】 由于函数 f(x)在 x=0,x=1 点处无定义，因此是间断点.

且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$，所以 x=0 为第二类间断点；

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-1$，

所以 x=1 为第一类间断点，故应选(D).

(13) 设λ_1,λ_2是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为α_1,α_2，则α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1 \neq 0$.　　(B) $\lambda_2 \neq 0$.　(C) $\lambda_1 = 0$.　(D) $\lambda_2 = 0$.

【 】

【答】　应选（B）

【详解】 按特征值特征向量定义，有 $A\left(\alpha_1+\alpha_2\right)=A\alpha_1+A\alpha_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$.

α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关$\Leftrightarrow k_1\alpha_1+k_2A(\alpha_1+\alpha_2)=0$，$k_1,k_2$恒为 0

$$\Leftrightarrow \left(k_1+\lambda_1 k_2\right)\alpha_1+\lambda_2 k_2\alpha_2=0,\ k_1,k_2 \text{恒为 } 0$$

由于不同特征值的特征向量线性无关，所以α_1,α_2线性无关.

于是 $\begin{cases} k_1+k_2\lambda_1=0, \\ k_2\lambda_2=0. \end{cases}$ k_1,k_2恒为 0

而齐次方程组 $\begin{cases} k_1+k_2\lambda_1=0, \\ k_2\lambda_2=0. \end{cases}$只有零解$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \lambda_2 \neq 0.$

所以应选（B）.

(14) 设 A 为 n（$n\geq 2$）阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B, A^*,B^*分别为 A,B 的伴随矩阵，则

(A) 交换A^*的第 1 列与第 2 列得B^*.　　(B) 交换A^*的第 1 行与第 2 行得B^*.

(C) 交换A^*的第 1 列与第 2 列得$-B^*$.　(D) 交换A^*的第 1 行与第 2 行得$-B^*$.

【 】

【答】　应选（C）

【详解】 为书写方便，不妨考查 A 为 3 阶矩阵，因为 A 做初等行变换得到 B，所以用初等矩阵左乘 A 得到 B，按已知有

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A = B.$$

于是 $$B^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = A^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

从而 $$\frac{B^*}{|B|} = \frac{A^*}{|A|} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

又因$|A| = -|B|$,故$A^* \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -B^*.$

所以选（C）

三 、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

（15）（本题满分 11 分）

设函数 f(x)连续，且 $f(0) \neq 0$，求极限$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x (x-t) f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt}$.

【详解】 由于$\int_0^x f(x-t) dt \overset{x-t=u}{=} \int_x^0 f(u)(-du) = \int_0^x f(u) du$，

于是

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (x-t) f(t) dt}{x \int_0^x f(x-t) dt} = \lim_{x \to 0} \frac{x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt}{x \int_0^x f(u) du}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x)}{\int_0^x f(u) du + x f(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{\int_0^x f(u) du + x f(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t) dt \Big/ x}{\int_0^x f(u) du \Big/ x + f(x)} = \frac{f(0)}{f(0) + f(0)} = \frac{1}{2}.$$

（16）（本题满分 11 分）

如图，C_1和C_2分别是$y = \frac{1}{2}(1 + e^x)$和$y = e^x$的图象，过点(0,1)的曲线C_3是一单

调增函数的图象. 过C_2上任一点M(x,y)分别作垂直于x轴和y轴的直线l_x和l_y. 记C_1,C_2与l_x所围图形的面积为$S_1(x)$；C_2,C_3与l_y所围图形的面积为$S_2(y)$.如果总有$S_1(x)=S_2(y)$，求曲线C_3的方程$x=\varphi(y)$.

【详解】 (1) 先求$S_1(x)$与$S_2(y)$的表达式.

由定积分的几何意义知

$$S_1(x)=\int_0^x[e^t-\frac{1}{2}(1+e^t)]dt=\frac{1}{2}(e^x-x-1),$$

$$S_2(y)=\int_1^y(\ln t-\varphi(t))dt,$$

(2) 由题设，$S_1(x)=S_2(y)$

即 $$\frac{1}{2}(e^x-x-1)=\int_1^y(\ln t-\varphi(t))dt,$$

其中$y=e^x$，于是

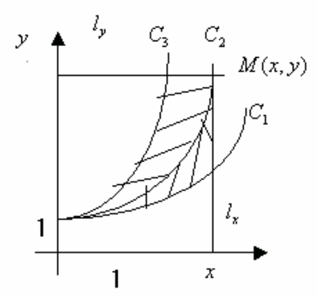
$$\frac{1}{2}(y-\ln y-1)=\int_1^y(\ln t-\varphi(t))dt$$

(3) 解方程①:

在①中令 y = 1，等式自然成立.

两边对①求导得 $$\frac{1}{2}(1-\frac{1}{y})=\ln y-\varphi(y),$$

故所求的函数关系为：$x=\varphi(y)=\ln y-\dfrac{y-1}{2y}.$



(17)（本题满分 11 分）

如图，曲线 C 的方程为 y=f(x)，点(3,2)是它的一个拐点，直线l_1与l_2分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2)处的切线，其交点为(2,4). 设函数 f(x)具有三阶连续导数，计算定积分$\int_0^3(x^2+x)f'''(x)dx.$

【详解】 按题意，直接可知

$f(0)=0,\ f(3)=2, f''(3)=0.$ （拐点必要条件）.从图中可求出 $y=f\left(x\right)$ 在点(0,0)与(3,2)处的切线分别为

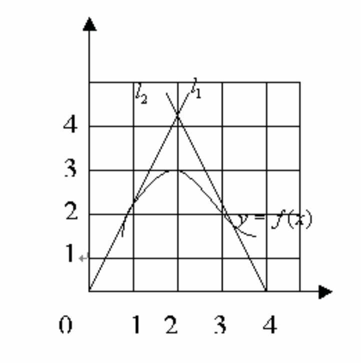
$$y=2x, y=-2x+8$$

于是　　$f'(0)=2$，　$f'(3)=-2$

现在分部积分法计算积分值：

原式

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^3\left(x^2+x\right)df''\left(x\right)=\left(x^2+x\right)f''\left(x\right)\Big|_0^3-\int_0^3\left(2x+1\right)f''\left(x\right)dx\\
&=-\int_0^3\left(2x+1\right)df'\left(x\right)=-\left(2x+1\right)f'\left(x\right)\Big|_0^3+2\int_0^3 f'\left(x\right)\\
&=-7\cdot f'\left(3\right)+f'\left(0\right)+2f\left(x\right)\Big|_0^3\\
&=-7\cdot\left(-2\right)+2+2\cdot\left(2-0\right)\\
&=20
\end{aligned}
$$



（18）（本题满分 12 分）

用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$，并求其满足 $y\Big|_{x=0}=1, y'\Big|_{x=0}=2$ 的特解.

【详解】　建立 y 对 t 的导数与 y 对 x 的导数之间的关系.

$$y'=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt},$$

$$y''=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=[\frac{\cos t}{\sin^2 t}\frac{dy}{dt}-\frac{1}{\sin t}\frac{d^2y}{dt^2}]\cdot(-\frac{1}{\sin t}),$$

代入原方程，得　　$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0.$$

解此微分方程，得 $$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

回到 x 为自变量得 $$y = C_1 x + C_2 \sqrt{1 - x^2}$$

将初始条件 $y\Big|_{x=0} = 1, y'\Big|_{x=0} = 2$ 代入，有 $C_1 = 2, C_2 = 1$.

故满足条件的特解为 $y = 2x + \sqrt{1 - x^2}$.

（19）（本题满分 12 分）

已知函数 f(x)在[0，1]上连续，在(0,1)内可导，且 f(0)=0,f(1)=1. 证明：

（I）存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$ ；

（II）存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$，使得 $f'(\eta) f'(\zeta) = 1$.

【详解】 （I） 即证 $F(x) = f(x) - 1 + x$，则 F(x)在[0，1]上连续，

且 F(0)=-1<0, F(1)=1>0,于是由介值定理知，存在存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $F(\xi) = 0$，

即 $f(\xi) = 1 - \xi$.

（II） 在 $[0, \xi]$ 和 $[\xi, 1]$ 上对 f(x)分别应用拉格朗日中值定理，

知存在两个不同的点 $\eta \in (0, \xi), \zeta \in (\xi, 1)$，

使得 $$f'(\eta) = \frac{f(\xi) - f(0)}{\xi - 0}, \quad f'(\zeta) = \frac{f(1) - f(\xi)}{1 - \xi}$$

于是

$$\begin{aligned} f'(\eta) f'(\zeta) &= \frac{f(\xi)}{\xi} \cdot \frac{1 - f(\xi)}{1 - \xi} \\ &= \frac{1 - \xi}{\xi} \cdot \frac{\xi}{1 - \xi} = 1. \end{aligned}$$

（20）（本题满分 10 分）

已知函数 z=f(x,y) 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$，并且 f(1,1,)=2. 求 f(x,y)在椭圆域 $D = \{(x, y) \Big| x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1\}$ 上的最大值和最小值.

.**【详解】** （1）先求 f (x , y).

由 $dz = dx^2 - dy^2 = d\left(x^2 - y^2\right) \Rightarrow z = x^2 - y^2 + c;$

由 $f(1,1)=2 \Rightarrow c=2 \Rightarrow z=f(x,y)=x^2-y^2+2.$

（2）求 f (x , y)在 D 内的驻点及相应函数值.

解 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2x=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y=0 \end{cases}$

得 (x , y) = (0 , 0).

唯一驻点(0 , 0) , f (0 , 0) = 2.

(3) 求 f (x , y) 在 D 的边界 $y^2=4(1-x^2)$ 上的最大值和最小值.

将 $y^2=4(1-x^2)$ $(|x|\le 1)$ 代入 $z=x^2-y^2+2$ 得

$$z(x)=x^2-4(1-x^2)+2=5x^2-2.$$

（4）比较函数值.

Z = f (x , y) 在 D 上的最大值是 $\max\{2,3,-2\}=3.$

最小值是 $\max\{2,3,-2\}=-2$.

解

（21）（本题满分 9 分）

计算二重积分 $\iint\limits_D |x^2+y^2-1|d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

【详解】 在 D 中，

$$|x^2+y^2-1|=\begin{cases} 1-(x^2+y^2) \\ x^2+y^2-1 \end{cases} \qquad x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0,$$

用圆弧 $x^2+y^2=1(x\ge 0, y\ge 0)$ 将 D 分成两部分， $D=D_1\cup D_2$，

记 $D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1,(x,y)\in D\}$，

$$D_2=\{(x,y)|x^2+y^2>1,(x,y)\in D\},$$

用分块积分法得

$$\iint\limits_D |x^2+y^2-1|d\sigma$$

$$=-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 (r^2-1)rdr+\iint\limits_D(x^2+y^2-1)dxdy-\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)dxdy$$

$$D_2=\frac{\pi}{8}+\int_0^1 dx\int_0^1(x^2+y^2-1)dy-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(r^2-1)rdr=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}.$$

（22）（本题满分 9 分）

确定常数 a,使向量组 $\alpha_1=(1,1,a)^T$，$\alpha_2=(1,a,1)^T$，$\alpha_3=(a,1,1)^T$ 可由向量组 $\beta_1=(1,1,a)^T$，$\beta_2=(-2,a,4)^T$，$\beta_3=(-2,a,a)^T$ 线性表示，但向量组 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

【详解】 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由向量组 β_1,β_2,β_3 线性表示，故三个方程组

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=\alpha_i \qquad (i=1,2,3)$$

均有解.对增广矩阵作初等行变换，有

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & a\\ 1 & a & a & \vdots & 1 & a & 1\\ a & 4 & a & \vdots & a & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & a\\ 0 & a+2 & a+2 & \vdots & 0 & a-1 & 0\\ 0 & 4+2a & 3a & \vdots & 0 & 1-a & 1-a\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & a\\ 0 & a+2 & a+2 & \vdots & 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & a-4 & \vdots & 0 & 3(1-a) & 1-a\end{bmatrix},$$

当 a=-2 时，
$$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -6 & \vdots & 0 & 3 & 3\end{bmatrix},$$

显然 α_2 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，因此 $a\neq-2$；

当 a=4 时，
$$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1 & -2 & -2 & \vdots & 1 & 1 & 4\\ 0 & 6 & 6 & \vdots & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -9 & -3\end{bmatrix},$$

显然然 α_2,α_3 均不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，因此 $a\neq4$.

而当 $a\neq-2$ 且 $a\neq4$ 时，秩 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$，此时向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由向量组 β_1,β_2,β_3 线性表示.

又 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 1 & a & 1 & \vdots & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & \vdots & a & 4 & a \end{bmatrix}$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & \vdots & 0 & 4+2a & 3a \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & \vdots & 1 & -2 & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & \vdots & 0 & a+2 & a+2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & \vdots & 0 & 6+3a & 4a+2 \end{bmatrix},$$

由题设向量组 β_1,β_2,β_3 不能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，必有 $a-1=0$ 或 $2-a-a^2=0$，即 a=1 或 $a=-2$.

综上所述，满足题设条件的 a 只能是：a=1.

（23）（本题满分 9 分）

已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 $(a,b,c),a,b,c$ 不全为零，矩阵 $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$（$k$ 为常数），且 $AB=0,$ 求线性方程组 $Ax=0$ 的通解.

【详解 1】 由 $AB=0,$ 知 $r(A)+r(B)\le 3.$ 又 $A\ne 0,B\ne 0$，

$$1\le r\left(A\right)\le 2,1\le r\left(B\right)\le 2.$$

（1） 若 $r\left(A\right)=2,$ 必有 $r\left(B\right)=1,$ 此时 $k=9.$

方程组 $Ax=0$ 的通解是 $t\left(1,2,3\right)^T$，其中 t 为任意实数.

（2） 若 $r\left(A\right)=1,$ 则 $Ax=0$ 的通解方程是 $ax_1+bx_2+cx_3=0$ 且满足 $\begin{cases} a+2b+3c=0, \\ \left(k-9\right)c=0. \end{cases}$

如果 $c\ne 0$，方程组的通解是 $t_1\left(c,0,-a\right)^T+t_2\left(0,c,-b\right)^T$，其中 t_1，t_2 为任意实数;

如果 $c=0$，方程组的通解是 $t_1\left(1,2,0\right)^T+t_2\left(0,0,1\right)^T$，其中 t_1，t_2 为任意实数;

【详解 2】 （1）如果 $k\ne 9,$ 则秩 $r\left(B\right)=2.$ 由 $AB=0,$ 知 $r(A)+r(B)\le 3.$ 因此，秩 $r\left(A\right)=1,$ 所以 $Ax=0$ 的通解是

$$t_1(1,2,3)^T+t_2(3,6,k)^T$$,其中t_1，t_2为任意实数;

（2）如果$k=9$.则秩$r(B)=1$,那么，秩$r(A)=1$或 2.

若$r(A)=2$,则$Ax=0$的通解是$t(1,2,3)^T$，其中t为任意实数.

若$r(A)=1$,对$ax_1+bx_2+cx_3=0$，设$c\neq0$，

则方程组的通解是

$$t_1(c,0,-a)^T+t_2(0,c,-b)^T$$