2003年全国硕士研究生入学统一考试
经济数学三试题详解及评析

一、 填空题

（1）设 $f(x)=\begin{cases} x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, & 若x\neq 0,\\ 0, & 若x=0, \end{cases}$ 其导函数在 x=0 处连续，则 λ 的取值范围是.____

【答】 $\lambda>2$

【详解】 当 $\lambda>1$ 时，有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\lambda}\cos\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}=0,$$

$$f(x)=\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}, x\neq 0.$$

于是

$$f'(x)=\begin{cases} \lambda x^{\lambda-1}\cos\dfrac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\dfrac{1}{x}, & 若x\neq 0,\\ 0, & 若x=0, \end{cases}$$

显然当 $\lambda>2$ 时，有 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0=f'(0)$，即其导函数在 x=0 处连续.

（2）已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$________

【答】 $4a^6$

【详解】 由题设，在切点处有

$$y'=3x^2-3a^2=0，有\quad x_0^2=a^2.$$

又在此点 y 坐标为 0，于是有

$$0=x_0^3-3a^2x_0+b=0,$$

故 $\quad b^2=x_0^2(3a^2-x_0^2)^2=a^2\cdot 4a^4=4a^6.$

(3) 设 a>0，$f(x)=g(x)=\begin{cases} a, 若0\leq x\leq 1,\\ 0, \quad 其他, \end{cases}$ 而 D 表示全平面，则 $I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)dxdy=$

____

【答】 a^2 .

【详解】 $I=\iint\limits_D f(x)g(y-x)dxdy=\iint\limits_{0\leq x\leq 1,0\leq y-x\leq 1}a^2\ dxdy$

$$= a^2\int_0^1 dx\int_x^{x+1} dy = a^2\int_0^1 [(x+1)-x]dx = a^2.$$

（4）设 n 维向量 $\alpha = (a,0,\cdots,0,a)^T, a<0$；E 为 n 阶单位矩阵，矩阵

$$A = E-\alpha\alpha^T,\quad B = E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T,$$

其中 A 的逆矩阵为 B，则 a=__________

【答】-1

【详解】 由题设，有

$$\begin{aligned}AB &= (E-\alpha\alpha^T)(E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T)\\ &= E-\alpha\alpha^T+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\frac{1}{a}\alpha\alpha^T\cdot\alpha\alpha^T\\ &= E-\alpha\alpha^T+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\frac{1}{a}\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T\\ &= E-\alpha\alpha^T+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-2a\alpha\alpha^T\\ &= E+(-1-2a+\frac{1}{a})\alpha\alpha^T = E,\end{aligned}$$

于是有 $-1-2a+\frac{1}{a}=0$，即 $2a^2+a-1=0$，解得 $a=\frac{1}{2}, a=-1$. 由于 A<0 ,故 a=-1.

（5）设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9, 若 $Z = X-0.4$，则 Y 与 Z 的相关系数为 ________ .

【答】 0.9

【详解】 因为

$$\operatorname{cov}(Y,Z) = \operatorname{cov}(Y,X-0.4) = Cov(Y,X)-Cov(Y,0.4)$$

$$= Cov(Y,X) = Cov(X,Y)$$

且 $D(Z) = D(X)$.

于是有 $\rho_{YZ} = \frac{\operatorname{cov}(Y,Z)}{\sqrt{DY}\sqrt{DZ}} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \rho_{XY} = 0.9.$

(6) 设总体 X 服从参数为 2 的指数分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则当 $n\to\infty$ 时，$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 ____

【答】 $\frac{1}{2}$

【详解】这里 $X_1^2, X_2^2, \cdots, X_n^2$ 满足大数定律的条件，且

$EX_i^2 = DX_i+(EX_i)^2 = \frac{1}{4}+(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$，因此根据辛钦大数定律有

$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=\frac{1}{2}$.

二、选择题

（1）设 f(x)为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$

(A) 在 x=0 处左极限不存在.　　(B) 有跳跃间断点 x=0.

(C) 在 x=0 处右极限不存在.　　(D) 有可去间断点 x=0.

【 】

【答】 [D]

【详解】 显然 x=0 为 g(x)的间断点，且由 f(x)为不恒等于零的奇函数知，f(0)=0.

于是有

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)\text{存在,}$$

故 x=0 为可去间断点.

（2）设可微函数 f(x,y)在点 (x_0,y_0) 取得极小值，则下列结论正确的是

(A) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零.　　(B) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零.

(C) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零.　　(D) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在.

【 】

【答】 [A]

【详解】 可微函数 f(x,y)在点 (x_0,y_0) 取得极小值，根据取极值的必要条件知 $f'_y(x_0,y_0)=0$，即 $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零，故应选(A).

（3）设 $p_n=\frac{a_n+|a_n|}{2}$，$q_n=\frac{a_n-|a_n|}{2}$，$n=1,2,\cdots$，则下列命题正确的是

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ 敛散性都不定.

(D) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}q_n$ 敛散性都不定.

【 】

【答】 [B]

【详解】 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛，当然也有级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，再根据$p_n = \frac{a_n + |a_n|}{2}$，$q_n = \frac{a_n - |a_n|}{2}$及收敛级数的运算性质知，$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$都收敛，故应选(B).

（4）设三阶矩阵$A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$，若 A 的伴随矩阵的秩为 1，则必有

(A) a=b 或 a+2b=0.　　(B) a=b 或 a+2b$\neq$0.

(C) a$\neq$b 且 a+2b=0.　　(D) a$\neq$b 且 a+2b$\neq$0.

【 】

【答】[C]

【详解】 根据 A 与其伴随矩阵 A*秩之间的关系知，秩(A)=2，故有

$$\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2 = 0,$$

即有$a + 2b = 0$或 a=b.

但当 a=b 时，显然秩(A)$\neq 2$，故必有 a$\neq$b 且 a+2b=0. 应选(C).

（5）设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$均为 n 维向量，下列结论不正确的是

(A) 若对于任意一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，都有$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s \neq 0$，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关.

(B) 若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关，则对于任意一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，都有$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关.

【 】

【答】[B]

【详解】 (A): 若对于任意一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，都有$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s \neq 0$，则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$必线性无关，因为若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关，则存在一组不全为零的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$,使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$，矛盾. 可见（A）

成立.

(B): 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则存在一组，而不是对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$. (B)不成立.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关,则此向量组的秩为 s；反过来，若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 s，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，因此(C)成立.

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关,则其任一部分组线性无关，当然其中任意两个向量线性无关，可见(D)也成立.

综上所述，应选(B).

（6）将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：A_1={掷第一次出现正面}，A_2={掷第二次出现正面}，A_3={正、反面各出现一次}，A_4={正面出现两次}，则事件

(A) A_1,A_2,A_3 相互独立.　　(B) A_2,A_3,A_4 相互独立.

(C) A_1,A_2,A_3 两两独立.　　(D) A_2,A_3,A_4 两两独立.

【 】

【答】[　C　]

【详解】 因为

$$P(A_1)=\frac{1}{2}，P(A_2)=\frac{1}{2}，P(A_3)=\frac{1}{2}，P(A_4)=\frac{1}{4},$$

且

$$P(A_1A_2)=\frac{1}{4}，P(A_1A_3)=\frac{1}{4}，P(A_2A_3)=\frac{1}{4},$$

$$P(A_2A_4)=\frac{1}{4}\ P(A_1A_2A_3)=0,$$

可见有

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)，P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3),$$

$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3)，P(A_1A_2A_3)\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

$$P(A_2A_4)\neq P(A_2)P(A_4).$$

故 A_1,A_2,A_3 两两独立但不相互独立；A_2,A_3,A_4 不两两独立更不相互独立，应选(C).

三 、(本题满分 8 分)

设

$$f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)},x\in[\frac{1}{2},1).$$

试补充定义 f(1)使得 f(x)在$[\frac{1}{2},1]$上连续.

【详解】 因为

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}[\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}]$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\lim_{x\to1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{(1-x)\sin\pi x}$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\lim_{x\to1^-}\frac{-\pi-\pi\cos\pi x}{-\sin\pi x+(1-x)\pi\cos\pi x}$$

$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\lim_{x\to1^-}\frac{\pi^2\sin\pi x}{-\pi\cos\pi x-\pi\cos\pi x-(1-x)\pi^2\sin\pi x}$$

$$=\frac{1}{\pi}.$$

由于 f(x)在$[\frac{1}{2},1)$上连续，因此定义 $f(1)=\frac{1}{\pi}$，

使 f(x)在$[\frac{1}{2},1]$上连续.

四 、设 f(u,v)具有二阶连续偏导数，且满足$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f[xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)]$，

求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

【详解】 $\frac{\partial g}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v}$，

$$\frac{\partial g}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial v}.$$

故

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\frac{\partial f}{\partial v}.$$

所以 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$

$$=x^2+y^2.$$

五 、(本题满分 8 分)

计算二重积分

$$I=\iint_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)dxdy.$$

其中积分区域 D=$\{(x,y)\big|x^2+y^2\le\pi\}$.

【详解】 作极坐标变换：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，有

$$I=e^{\pi}\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy$$

$$=e^{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}re^{-r^2}\sin r^2dr.$$

令 $t=r^2$，则

$$I=\pi e^{\pi}\int_0^{\pi}e^{-t}\sin tdt\,.$$

记 $A=\int_0^{\pi}e^{-t}\sin tdt$，则

$$A=-\int_0^{\pi}e^{-t}\operatorname{int}de^{-t}\quad=-[e^{-t}\sin t\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}e^{-t}\cos tdt]$$

$$=-\int_0^{\pi}\cos tde^{-t}\quad=-[e^{-t}\cos t\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^{-t}\sin tdt]$$

$$=e^{-\pi}+1-A.$$

因此

$$A=\frac{1}{2}(1+e^{-\pi}),$$

$$I=\frac{\pi e^{\pi}}{2}(1+e^{-\pi})=\frac{\pi}{2}(1+e^{\pi}).$$

六、(本题满分 9 分)

求幂级数$1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}(|x|<1)$的和函数 f(x)及其极值.

【详解】

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^{2n-1}=-\frac{x}{1+x^2}.$$

上式两边从 0 到 x 积分，得

$$f(x)-f(0)=-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

由 f(0)=1，得

$$f(x)=1-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),(|x|<1).$$

令 $f'(x)=0$，求得唯一驻点 x=0. 由于

$$f''(x)=-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

$$f''(0)=-1<0,$$

可见 f(x)在 x=0 处取得极大值，且极大值为

f(0)=1.

七、（本题满分 9 分）

设 F(x)=f(x)g(x)，其中函数 f(x),g(x)在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件：

$f'(x)=g(x)$，$g'(x)=f(x)$，且 f(0)=0，$f(x)+g(x)=2e^x$.

(1) 求 F(x)所满足的一阶微分方程；

(2) 求出 F(x)的表达式.

【详解】 (1) 由

$$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$=g^2(x)+f^2(x)\ =[f(x)+g(x)]^2-2f(x)g(x)$$

$$=(2e^x)^2-2F(x),$$

可见 F(x)所满足的一阶微分方程为

$$F'(x)+2F(x)=4e^{2x}.$$

(2) $F(x)=e^{-\int 2dx}[\int 4e^{2x}\cdot e^{\int 2dx}dx+C]$

$$=e^{-2x}[\int 4e^{4x}dx+C]\ =e^{2x}+Ce^{-2x}.$$

将 F(0)=f(0)g(0)=0 代入上式，得 C=-1.

于是

$$F(x)=e^{2x}-e^{-2x}.$$

八、设函数 f(x)在[0，3]上连续，在（0，3）内可导，且 f(0)+f(1)+f(2)=3，f(3)=1.试证必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

【详解 1】 因为 f(x)在[0，3]上连续，所以 f(x)在[0，2]上连续，且在[0，2]上必有最大值 M

和最小值 m，于是

$$m \le f(0) \le M \text{ ,}$$

$$m \le f(1) \le M \text{ ,}$$

$$m \le f(2) \le M \text{ .}$$

故

$$m \le \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} \le M.$$

由介值定理知，至少存在一点 $c \in [0,2]$，使

$$f(c) = \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3} = 1.$$

因为 f(c)=1=f(3), 且 f(x)在[c,3]上连续，在(c,3)内可导，所以由罗尔定理知，必存在 $\xi \in (c,3) \subset (0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

【详解 2】 反证法.设在 $\left[0,2\right]$ 上总有 $f\left(x\right)>1,$ 则 $f\left(0\right)+f\left(1\right)+f\left(2\right)>3$，与已知条件矛盾；类似可得在 $\left[0,2\right]$ 上不可能总有 $f\left(x\right)<1.$ 由于 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,2\right]$ 上连续，故根据闭区间上连续函数的介值定理知道至少存在一点 $c \in \left[0,2\right],$ 使得 $f\left(c\right)=1.$ 由于

$f\left(c\right)=f\left(3\right)=1,$ 且 $f\left(x\right)$ 在 $\left[c,3\right]$ 上连续，在 $\left(c,3\right)$ 内可导，故由罗尔定理可知必存在一点 $\xi \in \left(0,3\right)$ 使得 $f'\left(\xi\right)=0.$

九、已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^{n} a_i \ne 0$. 试讨论 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 b 满足何种关系时，

(1) 方程组仅有零解；

(2) 方程组有非零解. 在有非零解时，求此方程组的一个基础解系.

【详解】 方程组的系数行列式

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

$$= b^{n-1}(b + \sum_{i=1}^{n} a_i).$$

(1) 当$b \neq 0$时且$b + \sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$时，秩(A)=n，方程组仅有零解.

(2) 当 b=0 时，原方程组的同解方程组为

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

由$\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$可知，$a_i\,(i = 1,2,\cdots,n)$不全为零. 不妨设$a_1 \neq 0$，得原方程组的一个基础解系为

$$\alpha_1 = (-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0)^T，\ \alpha_2 = (-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0)^T，\ \cdots,\alpha_n = (-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1)^T.$$

当$b = -\sum_{i=1}^{n} a_i$时，有$b \neq 0$，原方程组的系数矩阵可化为

$$\begin{bmatrix} a_1 - \sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 - \sum_{i=1}^{n} a_i & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 - \sum_{i=1}^{n} a_i & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n - \sum_{i=1}^{n} a_i \end{bmatrix} \qquad (*)$$

将 $(*)$第 1 行的-1 倍加到其余各行，再从第 2 行到第 n 行同乘以$-\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$倍，得

$$\begin{bmatrix} a_1-\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (**)$$

将 $(**)$ 第 n 行 $-a_n$ 倍到第 2 行的 $-a_2$ 倍加到第 1 行，再将第 1 行移到最后一行

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

由此得原方程组的同解方程组为

$x_2 = x_1$， $x_3 = x_1$， $\cdots, x_n = x_1$.

原方程组的一个基础解系为

$\alpha = (1,1,\cdots,1)^T$.

十、设二次型

$f(x_1,x_2,x_3) = X^TAX = ax_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2bx_1x_3 (b>0)$，

中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为-12.

(1) 求 a,b 的值；

(2) 利用正交变换将二次型 f 化为标准形，并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

【详解 1】 （1）二次型 f 的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

设 A 的特征值为 $\lambda_i (i=1,2,3)$. 由题设，有

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a + 2 + (-2) = 1,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4a - 2b^2 = -12.$$

解得 a=1,b= -2.

(2) 由矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -2\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -2 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3),$$

得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3.$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2,$ 解齐次线性方程组 $(2E-A)x=0$，得其基础解系

$$\xi_1=(2,0,1)^T，\ \xi_2=(0,1,0)^T.$$

对于 $\lambda_3=-3$，解齐次线性方程组 $(-3E-A)x=0$，得基础解系

$$\xi_3=(1,0,-2)^T.$$

由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3 已是正交向量组，为了得到规范正交向量组，只需将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化，由此得

$$\eta_1=(\frac{2}{\sqrt{5}},0,\frac{1}{\sqrt{5}})^T，\ \eta_2=(0,1,0)^T，\ \eta_3=(\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}})^T.$$

令矩阵

$$Q=\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix},$$

则 Q 为正交矩阵. 在正交变换 X=QY 下，有

$$Q^TAQ=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix},$$

且二次型的标准形为

$$f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2.$$

【详解 2】 (1) 二次型 f 的矩阵 A 对应特征多项式为

$$A=\begin{bmatrix}a & 0 & b\\ 0 & 2 & 0\\ b & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

设 A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a & 0 & -b\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -b & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)[\lambda^2-(a-2)\lambda-(2a+b^2)].$$

设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，则 $\lambda_1=2,\lambda_2+\lambda_3=a-2,\lambda_2\lambda_3=-(2a+b^2)$. 由题设得

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+(a-2)=1,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-2(2a+b^2)=-12.$$

解得 a=1,b=2.

（2）由（1），可得 A 的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3.$

以下可参见详解 1.

十一、设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 若x\in[1,8],\\ 0, & 其他;\end{cases}$$

F(x)是 X 的分布函数. 求随机变量 Y=F(X)的分布函数.

【详解】 易见，当 x<1 时，F(x)=0; 当 x>8 时，F(x)=1.

对于$x\in[1,8]$，有

$$F(x)=\int_1^x\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}dt=\sqrt[3]{x}-1.$$

设 G(y)是随机变量 Y=F(X)的分布函数. 显然，当$y<0$时，G(y)=0；当$y\geq 1$时，G(y)=1.

对于$y\in[0,1)$，有

$$G(y)=P\{Y\leq y\}=P\{F(X)\leq y\}$$

$$=P\{\sqrt[3]{X}-1\leq y\}=P\{X\leq(y+1)^3\}$$

$$=F[(y+1)^3]=y.$$

于是，Y=F(X)的分布函数为

$$G(y)=\begin{cases}0, & 若y<0,\\ y, & 若0\leq y<1,\\ 1, & 若y\geq 1.\end{cases}$$

【详解 2】 不求 F(x)的具体表达式子，因为 Y=F(X)的分布函数为

$$G(y)=P\{Y\leq y\}=P\{F(x)\leq y\}$$

$$=P\left\{\sqrt[3]{X}-1\leq y\right\}=P\left\{X\leq(y+1)^3\right\}=P\left[(y+1)^3\right]=y$$

注意到 F（x）为分布函数，于是有$0\leq F(x)\leq 1$, 因此

当 y<0 时，G(y)=0;

当 $y \ge 1$时，G(y)=1;

当 $0 \le y < 1$时，$G(y) = P\{Y \le y\} = P\{F(X) \le y\}$

$$= P\{X \le F^{-1}(y)\} = F(F^{-1}(y)) = y.$$

十二、设随机变量 X 与 Y 独立，其中 X 的概率分布为

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix},$$

而 Y 的概率密度为 f(y)，求随机变量 U=X+Y 的概率密度 g(u).

【详解】 设 F(y)是 Y 的分布函数，则由全概率公式，知 U=X+Y 的分布函数为

$$G(u) = P\{X + Y \le u\}$$

$$= 0.3P\{X + Y \le u \mid X = 1\} + 0.7P\{X + Y \le u \mid X = 2\}$$

$$= 0.3P\{Y \le u - 1 \mid X = 1\} + 0.7P\{Y \le u - 2 \mid X = 2\}.$$

由于 X 和 Y 独立，可见

$$G(u) = 0.3P\{Y \le u - 1\} + 0.7P\{Y \le u - 2\}$$

$$= 0.3F(u - 1) + 0.7F(u - 2).$$

由此,得 U 的概率密度

$$g(u) = G'(u) = 0.3F'(u - 1) + 0.7F'(u - 2)$$

$$= 0.3f(u - 1) + 0.7f(u - 2).$$